$\boxed{1}$

n を 2 以上の自然数とする。

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{2}x^n \leqq (-1)^n\left\{\frac{1}{x+1}-1-\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}\right\} \leqq x^n-\frac{1}{2}x^{n+1}$$

(2) $a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ とするとき，次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\, n(a_n-\log 2)$$

(1) 等比級数の公式より，

$$\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1} = \frac{(-x)\cdot\{1-(-x)^{n-1}\}}{1+x}$$

だから，

$$\frac{1}{x+1}-1-\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}$$

$$= \frac{1-(x+1)-(-x)\{1-(-x)^{n-1}\}}{1+x} = \frac{(-x)^n}{1+x}$$

つまり，
$$(-1)^n\left\{\frac{1}{x+1}-1-\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}\right\} = \frac{(-1)^{2n}\cdot x^n}{x+1} = \frac{x^n}{x+1} \quad \cdots ①$$

ここで，$0 \leqq x \leqq 1$ のとき $\dfrac{x^n}{x+1} \geqq \dfrac{x^n}{1+1} = \dfrac{x^n}{2}$． $\cdots ②$

また $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，

$$x^n-\frac{1}{2}x^{n+1}-\frac{x^n}{x+1}$$

$$= x^n\left(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{x+1}\right) = x^n\cdot\frac{2(x+1)-x(x+1)-2}{2(x+1)}$$

$$= \frac{x^n(1-x)x}{2(x+1)} \geqq 0$$ より $$\frac{x^n}{x+1} \leqq x^n-\frac{1}{2}x^{n+1} \quad \cdots ③$$

したがって，①②③より，$0 \leqq x \leqq 1$ において以下の不等式が成立，

$$\frac{1}{2}x^n \leqq (-1)^n\left\{\frac{1}{x+1}-1-\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}\right\} \leqq x^n-\frac{1}{2}x^{n+1}. \quad \square$$

(2) (1) の不等式の各辺について，$0 \leqq x \leqq 1$ で定積分すると，

$$\int_0^1 \frac{1}{2}x^n\,dx = \frac{1}{2(n+1)}$$

$$\int_0^1 (-1)^n \left\{ \frac{1}{x+1} - 1 - \sum_{k=2}^{n} (-x)^{k-1} \right\} dx$$

$$= (-1)^n \left\{ \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx - 1 - \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \int_0^1 x^{k-1}\,dx \right\}$$

$$= (-1)^n \left\{ \log 2 - 1 - \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right\}$$

$$= (-1)^n \left\{ \log 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k}}{k} \right\} = (-1)^n \cdot (\log 2 - a_n)$$

$$\int_0^1 \left(x^n - \frac{1}{2}x^{n+1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[x^{n+1}\right]_0^1 - \frac{1}{2(n+2)}\left[x^{n+2}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+2)}$$

より，

$$\frac{1}{2(n+1)} \leqq (-1)^n \cdot (\log 2 - a_n) \leqq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+2)}$$

$$-\frac{n}{n+1} + \frac{n}{2(n+2)} \leqq (-1)^n \cdot n \cdot (a_n - \log 2) \leqq -\frac{n}{2(n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{n}{n+1} + \frac{n}{2(n+2)} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{2\left(1+\frac{2}{n}\right)} \right) = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{n}{2(n+1)} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)} \right) = -\frac{1}{2}$$

だから，はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot n \cdot (a_n - \log 2) = -\frac{1}{2}$. □

$\boxed{2}$

平面上の 3 点 O, A, B が

$$|2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1 \text{ かつ } (2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})=\frac{1}{3}$$

をみたすとする。

(1) $(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}})$ を求めよ。

(2) 平面上の点 P が

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})|\leqq\frac{1}{3} \text{ かつ } \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\leqq\frac{1}{3}$$

をみたすように動くとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ の最大値と最小値を求めよ。

(1) $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ とおくと，与えられた式より，

$$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\quad (2\vec{a}+\vec{b})\cdot(3\vec{a}+3\vec{b})=1$$

$$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot\{(\vec{a}+2\vec{b})+(2\vec{a}+\vec{b})\}=1$$

$$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})+|2\vec{a}+\vec{b}|^2=1$$

$|2\vec{a}+\vec{b}|^2=1$ より．　$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})=\underline{\underline{0}}$ ． □

(2) $\vec{s}=2\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{t}=\vec{a}+2\vec{b}$ とおくと，(1) の結果より $\vec{s}\cdot\vec{t}=0$.

$|2\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{s}|=1\neq0$, $|\vec{a}+2\vec{b}|=1\neq0$ より $\vec{s}, \vec{t}\neq\vec{0}$ だから $\vec{s}, \vec{t}$ は直交する.

また，$|\vec{s}|=1$, $|\vec{t}|=1$ を満たす.

$\vec{s}, \vec{t}$ を用いて与えられた条件を書き換えると．$\vec{p}=\overrightarrow{OP}$ として

$$\begin{cases} \left|p-\dfrac{\vec{s}+\vec{t}}{3}\right|\leqq\dfrac{1}{3} & \cdots① \\ \vec{p}\cdot\vec{s}\leqq\dfrac{1}{3} & \cdots② \end{cases}$$

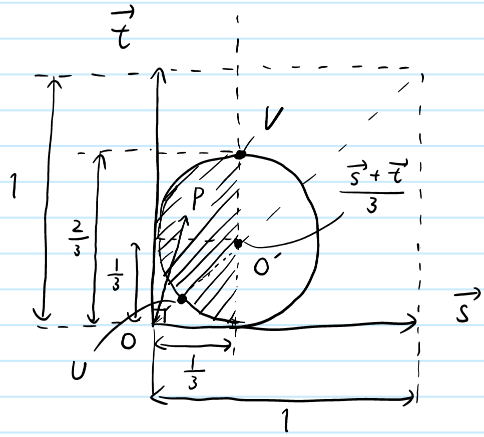
① より $\vec{p}$ は $\dfrac{\vec{s}+\vec{t}}{3}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{3}$ の円の周および内部を動く.

また ②について、$\vec{p}$ と $\vec{s}$ の成す角を θ とすると、$|\vec{s}|=1$ より

$\vec{p}\cdot\vec{s} = |\vec{p}||\vec{s}|\cos\theta = |\vec{p}|\cos\theta$ だから、

$$|\vec{p}|\cos\theta \leqq \frac{1}{3}$$

である。



これらを満たす $\vec{p}$ の領域を図示すると右図。

ただし、境界線をいずれも含む。

$|\vec{p}|$ が最小となるのは $\vec{p}$ が図の点Uを表すときであり、このとき $\overrightarrow{OO'} = \dfrac{\vec{s}+\vec{t}}{3}$ として

$$|\vec{p}| = OO' - OU = \frac{\sqrt{2}-1}{3}$$

である。また、$|\vec{p}|$ が最大となるのは $\vec{p}$ が図の点Vを表すときであり、このとき

$$|\vec{p}| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

である。したがって、

$$\underline{\underline{\frac{\sqrt{2}-1}{3}}} \leqq |\vec{p}| \leqq \underline{\underline{\frac{\sqrt{5}}{3}}}.$$

$\boxed{3}$

P を座標平面上の点とし，点 P の座標を $(a,\ b)$ とする。$-\pi \leqq t \leqq \pi$ の範囲にある実数 t のうち，曲線 $y = \cos x$ 上の点 $(t,\ \cos t)$ における接線が点 P を通るという条件をみたすものの個数を $N(\mathrm{P})$ とする。$N(\mathrm{P}) = 4$ かつ $0 < a < \pi$ を満たすような点 P の存在範囲を座標平面上に図示せよ。

$y = \cos x$ に対して $y' = -\sin x$ より，$y = \cos x$ の点 $(t,\ \cos t)$ における接線の方程式は

$$y - \cos t = -\sin t\,(x - t)$$

これが点 $(a,\ b)$ を通るので，

$$b - \cos t = -\sin t\,(a - t)$$

整理して，
$$(t-a)\cdot\sin t + \cos t = b$$

$f(t) = (t-a)\cdot\sin t + \cos t$ とおくと，方程式 $f(t) = b$ が $-\pi \leqq t \leqq \pi$ の範囲で異なる4つの実数解をもつような (a, b) の条件を求めればよい。

$$f(t) = (t-a)\sin t + \cos t \qquad (-\pi \leqq t \leqq \pi)$$

に対して，
$$\begin{aligned} f'(t) &= \sin t + (t-a)\cos t - \sin t \\ &= (t-a)\cos t \end{aligned}$$

(1) $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

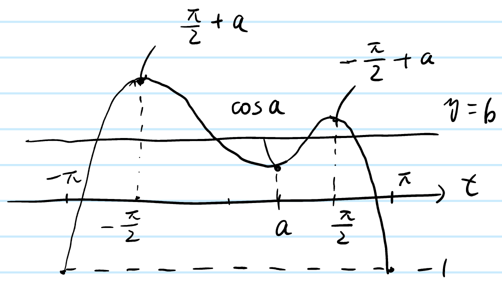
t	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	a	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	-1	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}+a$	$\searrow$	$\cos a$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}-a$	$\searrow$	-1

より，$y = f(t)$ のグラフの概形は右。

求める条件は，$y = f(t)$ と $y = b$ の表す曲線が異なる4点で交わることだから，

$$\cos a < b < -\frac{\pi}{2} + a$$

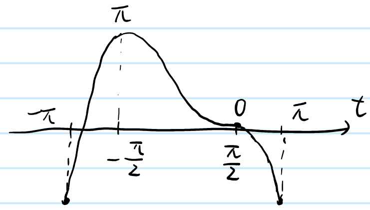
である。



[2]　$a = \dfrac{\pi}{2}$ のとき

同様に，

t	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$-$	
$f(t)$	-1	↘	π	↘	0	0	-1



このとき，$y = f(t)$ のグラフの概形は右．
よって，$y = f(t)$ と $y = b$ の表す曲線は高々2点と交わるので，題意を満たす (a, b) は存在しない．

[3]　$\dfrac{\pi}{2} < a < \pi$ のとき

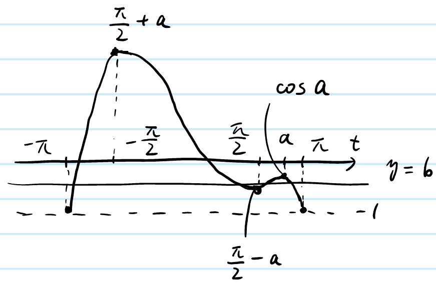
同様に，

t	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	a	$\cdots$	π
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(t)$	-1	↗	$\frac{\pi}{2}+a$	↘	$\frac{\pi}{2}-a$	↗	$\cos a$	↘	-1

(i)　$\dfrac{\pi}{2} - a \geqq -1$ すなわち $\dfrac{\pi}{2} < a \leqq \dfrac{\pi}{2} + 1$ のとき

$y = f(t)$ のグラフの概形は右図．よって，

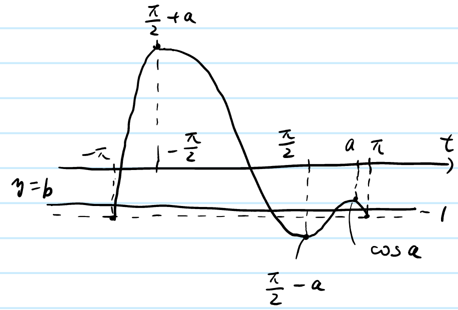
$$\frac{\pi}{2} - a < b < \cos a.$$



(ii)　$\dfrac{\pi}{2} - a < -1$ すなわち $\dfrac{\pi}{2} + 1 < a < \pi$ のとき

$y = f(t)$ のグラフの概形は右図．よって，

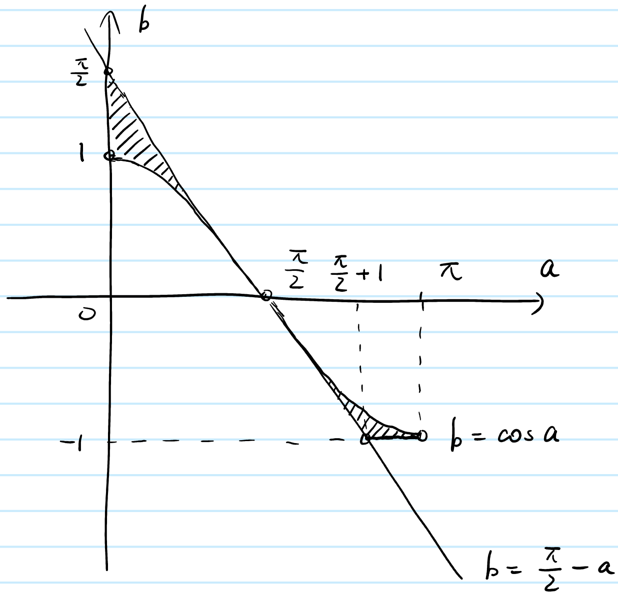
$$-1 \leqq b < \cos a.$$



よって，(1)(2)(3) より

$$\begin{cases} \cos a < b < \dfrac{\pi}{2} - a & \left(0 < a < \dfrac{\pi}{2}\right) \\ \dfrac{\pi}{2} - a < b < \cos a & \left(\dfrac{\pi}{2} < a \leqq \dfrac{\pi}{2} + 1\right) \\ -1 \leqq b < \cos a & \left(\dfrac{\pi}{2} + 1 < a < \pi\right) \end{cases}$$

だから，求める領域は以下である．



※ 境界線は $b=-1$ の

$\frac{\pi}{2}+1<a<\pi$ の部分のみ含む.

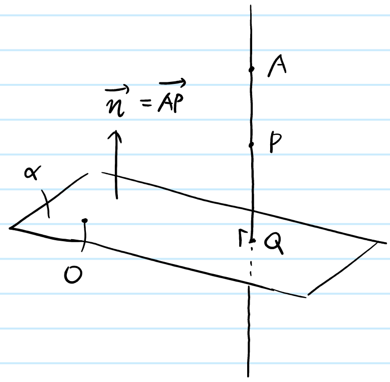
$\boxed{4}$

$a,\ b$ を $a^2+b^2>1$ かつ $b\neq 0$ をみたす実数の定数とする。座標空間の点 A$(a,\ 0,\ b)$ と点 P $(x,\ y,\ 0)$ をとる。点 O$(0,\ 0,\ 0)$ を通り直線 AP と垂直な平面を α とし，平面 α と直線 AP との交点を Q とする。

(1) $\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right)^2=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2$ が成り立つことを示せ。

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=1$ をみたすように点 P$(x,\ y,\ 0)$ が xy 平面上を動くとき，点 P の軌跡を求めよ。

(1) 平面 α の法線ベクトルは $\vec{n}=\overrightarrow{AP}$ より，



$$\vec{n}=\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a\\0\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-a\\y\\-b\end{pmatrix}$$

である．

α は点O を含むので，α 上の任意の点 (X, Y, Z) は

$$(x-a)X+yY+(-b)Z=0 \quad \cdots ①$$

を満たす．

点Q の座標を求めると，$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AP}$ を満たす k が存在することから

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}kx+(1-k)a\\y\cdot ky\\(1-k)b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}kx+(1-k)a\\ky\\(1-k)b\end{pmatrix}$$

と表せる．一方，Q は α 上の点より

$$(x-a)\cdot\left(kx+(1-k)a\right)+y\cdot ky+(-b)\cdot(1-k)b=0$$

これを k について解くと，

$$\{(x-a)^2+y^2+b^2\}k=a^2-ax+b^2$$

$$\therefore\quad k=\frac{a^2-ax+b^2}{(x-a)^2+y^2+b^2} \quad \cdots ②$$

を得る．

よって，

$$|\overrightarrow{AP}|^2\cdot|\overrightarrow{AQ}|^2=k^2\cdot|AP|^2\cdot|\overrightarrow{AP}|^2$$

$$=\frac{(a^2-ax+b^2)^2}{\{(x-a)^2+y^2+b^2\}^2}\cdot\{(x-a)^2+y^2+b^2\}^2=(a^2-ax+b^2)^2$$

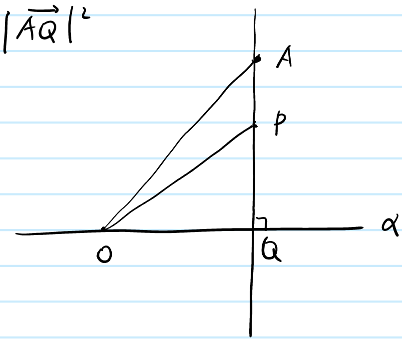
一方，

$$(\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ})^2 = \left(\begin{pmatrix} x-a \\ y \\ -b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ -b \end{pmatrix}\right)^2$$

$$= (a^2 - ax + b^2)^2$$

だから，$(\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ})^2 = |\overrightarrow{AP}|^2|\overrightarrow{AQ}|^2$ が示された．□

(2) 右図における三平方の定理より．$|\overrightarrow{OQ}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 - |\overrightarrow{AQ}|^2$



これと(1)の結果より．

$$|\overrightarrow{OQ}|^2 = 1$$

$$|\overrightarrow{OA}|^2 - |\overrightarrow{AQ}|^2 = 1$$

$$|\overrightarrow{OA}|^2 - \frac{(\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AO})^2}{|\overrightarrow{AP}|^2} = 1$$

$$a^2+b^2 - \frac{(a(a-x)+b^2)^2}{(x-a)^2+y^2+b^2} = 1 \quad \left(\because\ \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x-a \\ y \\ -b \end{pmatrix},\ \overrightarrow{AO} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ -b \end{pmatrix}\right)$$

$$(a^2+b^2-1)\{(x-a)^2+y^2+b^2\} = a^2(x-a)^2 + 2a(a-x)b^2 + b^4$$

$$(b^2-1)(x-a)^2 + 2ab^2(x-a) + (a^2+b^2-1)y^2 + (a^2-1)b^2 = 0$$

[1] $b=\pm 1$ のとき

$$2a(x-a) + a^2y^2 + (a^2-1) = 0$$

$a^2+b^2>1$，$b^2=1$ より $a^2>0$ だから，

$$y^2 = -\frac{2}{a}(x-a) + \left(\frac{1}{a^2}-1\right)$$

$$\therefore \text{ 放物線 } \underline{\underline{y^2 = -\frac{2}{a}x + \frac{1}{a^2} + 1}} \quad . \quad (b=\pm 1)$$

[2] $b\neq\pm 1$ のとき

$$(b^2-1)\left\{(x-a) + \frac{ab^2}{b^2-1}\right\}^2 + (a^2+b^2-1)y^2 = \frac{b^2(a^2+b^2-1)}{b^2-1}$$

$$\therefore \underline{\underline{\frac{(b^2-1)^2}{b^2(a^2+b^2-1)}\left(x + \frac{a}{b^2-1}\right)^2 + \frac{b^2-1}{b^2}y^2 = 1}}$$

(※ $b^2>1$ のとき楕円，$b^2<1$ のとき双曲線)

を描く．□

$\boxed{5}$

1 個のさいころを n 回投げて，k 回目に出た目を a_k とする。b_n を

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} a_1^{\,n-k} a_k$$

により定義し，b_n が 7 の倍数となる確率を p_n とする。

(1) p_1，p_2 を求めよ。

(2) 数列 $\{p_n\}$ の一般項を求めよ。

$$b_n = a_1^n + a_1^{n-2}\cdot a_2 + a_1^{n-3}\cdot a_3 + \cdots + a_1 a_{n-1} + a_n$$
$$= a_1(a_1^{n-1} + a_1^{n-3}a_2 + a_1^{n-4}a_3 + \cdots + a_{n-1}) + a_n \quad (n \geqq 2)$$
$$= a_1 b_{n-1} + a_n \quad (n \geqq 2) \quad \cdots ①$$

(1) p_1 : a_1 が 7の倍数になる確率であり. さいころの目は $1, 2, \cdots, 6$ だから $\underline{\underline{p_1 = 0}}$.

p_2 : $a_1^2 + a_2$ が 7の倍数になる確率であり,

$$a_1 \equiv 1, 2, 3, 4, 5, 6 \pmod 7$$

に対して, $a_1^2 \equiv 1, 4, 2, 2, 4, 1 \pmod 7$ である. $a_1^2 \equiv 1$ のとき. $b_2 = a_1^2 + a_2$ を 7の倍数にする a_2 は 6 のみ, 同様に $a_1^2 \equiv 2, 4$ のとき b_2 を 7の倍数にする a_2 は それぞれ 5, 3 のみ. すなわち. a_1 がいかなる場合でも, そのそれぞれに対して b_2 を 7の倍数にする a_2の出方は 1 通り.

よって. $\underline{\underline{p_2 = \dfrac{1}{6}}}$.

(2) (i) b_{n-1} が 7の倍数のとき $(n \geqq 2)$

①において, $a_1 b_{n-1}$ も 7の倍数. 一方, $a_n \in \{1, 2, \cdots, 6\}$ より,

$$b_n \equiv a_1 b_{n-1} + a_n \pmod 7 \equiv a_n \pmod 7 = 1, 2, \cdots, 6 \pmod 7$$

より. 常に b_n は 7の倍数でない.

(ii) b_{n-1} が 7の倍数でないとき

$b_{n-1} \equiv 1, 2, 3, 4, 5, 6 \pmod 7$ のいずれかであり、$a_1 b_{n-1}$ の 7 を法とした合同式の値は以下のようになる。

a_1 \ b_{n-1}	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

$b_n = a_1 b_{n-1} + a_n$ が 7の倍数のとき、

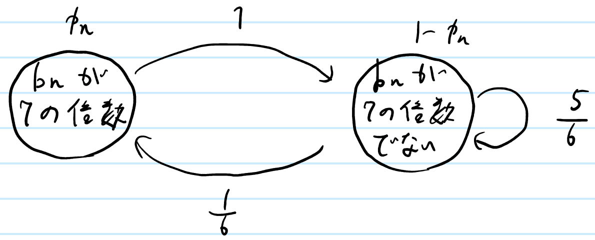
$$0 \equiv a_1 b_{n-1} + a_n \pmod 7$$

$$\therefore\ a_n \equiv -a_1 b_{n-1} \pmod 7$$

より、b_n を 7の倍数にするような a_n の値は以下。

a_1 \ b_{n-1}	1	2	3	4	5	6
1	6	5	4	3	2	1
2	5	3	1	6	4	2
3	4	1	5	2	6	3
4	3	6	2	5	1	4
5	2	4	6	1	3	5
6	1	2	3	4	5	6

すなわち、いかなる (a_1, b_{n-1}) の組み合わせにおいても、常に b_n を 7 の倍数にするような a_n の場合の数は 1通りだから、b_n は常に確率 $\frac{1}{6}$ で 7の倍数になる。



よって、$p_n = \frac{1}{6}(1 - p_{n-1}) \quad (n \geq 2)$. 特性方程式 $\alpha = \frac{1}{6}(1-\alpha)$

より $\alpha = \frac{1}{7}$ を得るので

$$\begin{aligned} p_n - \frac{1}{7} &= \left(-\frac{1}{6}\right)\left(p_{n-1} - \frac{1}{7}\right) \\ &= \left(-\frac{1}{6}\right)^2\left(p_{n-2} - \frac{1}{7}\right) \\ &= \cdots \\ &= \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\left(p_1 - \frac{1}{7}\right) = -\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} \quad (\because p_1 = 0) \end{aligned}$$

$$\therefore\ p_n = \underline{\underline{\frac{1}{7}\left\{1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}}} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$ を得る。□