

1

n を 2 以上の自然数とする。

(1) $0 \leq x \leq 1$ のとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{2}x^n \leq (-1)^n \left\{ \frac{1}{x+1} - 1 - \sum_{k=2}^n (-x)^{k-1} \right\} \leq x^n - \frac{1}{2}x^{n+1}$$

(2) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ とするとき、次の極限值を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n(a_n - \log 2)$$

(1) 等比級数の公式より、

$$\sum_{k=2}^n (-x)^{k-1} = \frac{(-x) \cdot \{1 - (-x)^{n-1}\}}{1+x}$$

だから、

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} - 1 - \sum_{k=2}^n (-x)^{k-1} \\ = \frac{1 - (x+1) - (-x) \{1 - (-x)^{n-1}\}}{1+x} = \frac{(-x)^n}{1+x} \end{aligned}$$

$$\text{つまり、} \quad (-1)^n \left\{ \frac{1}{x+1} - 1 - \sum_{k=2}^n (-x)^{k-1} \right\} = \frac{(-1)^{2n} \cdot x^n}{x+1} = \frac{x^n}{x+1} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{こゝで、} \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ のとき} \quad \frac{x^n}{x+1} \geq \frac{x^n}{1+1} = \frac{x^n}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

また $0 \leq x \leq 1$ のとき、

$$\begin{aligned} x^n - \frac{1}{2}x^{n+1} - \frac{x^n}{x+1} \\ = x^n \left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{x+1} \right) = x^n \cdot \frac{2(x+1) - x(x+1) - 2}{2(x+1)} \\ = \frac{x^n(1-x)x}{2(x+1)} \geq 0 \end{aligned} \quad \text{よって} \quad \frac{x^n}{x+1} \leq x^n - \frac{1}{2}x^{n+1} \quad \dots \textcircled{3}$$

したがって、 $\textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3}$ より、 $0 \leq x \leq 1$ において以下の不等式が成立、

$$\frac{1}{2}x^n \leq (-1)^n \left\{ \frac{1}{x+1} - 1 - \sum_{k=2}^n (-x)^{k-1} \right\} \leq x^n - \frac{1}{2}x^{n+1}. \quad \square$$

(2) (1) の不等式の各辺について, $0 \leq x \leq 1$ で定積分すると,

$$\int_0^1 \frac{1}{2} x^n dx = \frac{1}{2(n+1)}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (-1)^n \left\{ \frac{1}{x+1} - 1 - \sum_{k=2}^n (-x)^{k-1} \right\} dx \\ &= (-1)^n \left\{ \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx - 1 - \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} \int_0^1 x^{k-1} dx \right\} \\ &= (-1)^n \left\{ \log 2 - 1 - \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right\} \\ &= (-1)^n \left\{ \log 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \right\} = (-1)^n \cdot (\log 2 - a_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(x^n - \frac{1}{2} x^{n+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{n+1} [x^{n+1}]_0^1 - \frac{1}{2(n+2)} [x^{n+2}]_0^1 \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+2)} \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2(n+1)} &\leq (-1)^n \cdot (\log 2 - a_n) \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+2)} \\ -\frac{n}{n+1} + \frac{n}{2(n+2)} &\leq (-1)^n \cdot n \cdot (a_n - \log 2) \leq -\frac{n}{2(n+1)} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{n}{n+1} + \frac{n}{2(n+2)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{\frac{1}{n}}{2\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \right) = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{n}{2(n+1)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{\frac{1}{n}}{2\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \right) = -\frac{1}{2}$$

たゞし, はさみうちの原理より $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot n \cdot (a_n - \log 2) = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$. $\square$

2

平面上の 3 点 O, A, B が

$$|2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}| = 1 \quad \text{かつ} \quad (2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{3}$$

をみたすとする。

(1) $(2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB})$ を求めよ。

(2) 平面上の点 P が

$$|\overrightarrow{OP} - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})| \leq \frac{1}{3} \quad \text{かつ} \quad \overrightarrow{OP} \cdot (2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \leq \frac{1}{3}$$

をみたすように動くとき, $|\overrightarrow{OP}|$ の最大値と最小値を求めよ。

(1) $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とおくと, 与えられた条件より,

$$(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) = \frac{1}{3}$$

$$\therefore (2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (3\vec{a} + 3\vec{b}) = 1$$

$$(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot \{(\vec{a} + 2\vec{b}) + (2\vec{a} + \vec{b})\} = 1$$

$$(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) + |2\vec{a} + \vec{b}|^2 = 1$$

$$|2\vec{a} + \vec{b}|^2 = 1 \quad \text{より} \quad (2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) = \underline{\underline{0}} \quad \square$$

(2) $\vec{s} = 2\vec{a} + \vec{b}, \vec{t} = \vec{a} + 2\vec{b}$ とおくと, (1) の結果より $\vec{s} \cdot \vec{t} = 0$.

$|2\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{s}| = 1 \neq 0, |\vec{a} + 2\vec{b}| = |\vec{t}| = 1 \neq 0$ より $\vec{s}, \vec{t} \neq \vec{0}$ であるから $\vec{s}, \vec{t}$ は直交する。

また, $|\vec{s}| = 1, |\vec{t}| = 1$ を満たす。

$\vec{s}, \vec{t}$ を用いて与えられた条件を書き換えると, $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ とし

$$\begin{cases} \left| \vec{p} - \frac{\vec{s} + \vec{t}}{3} \right| \leq \frac{1}{3} & \dots \textcircled{1} \\ \vec{p} \cdot \vec{s} \leq \frac{1}{3} & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

① より, $\vec{p}$ は $\frac{\vec{s} + \vec{t}}{3}$ を中心とする半径 $\frac{1}{3}$ の円の周および内部を動く。

また ② について, $\vec{p}$ と $\vec{s}$ の成す角を θ とすると, $|\vec{s}| = 1$ より
 $\vec{p} \cdot \vec{s} = |\vec{p}| |\vec{s}| \cos \theta = |\vec{p}| \cos \theta$ となる,

$$|\vec{p}| \cos \theta \leq \frac{1}{3}$$

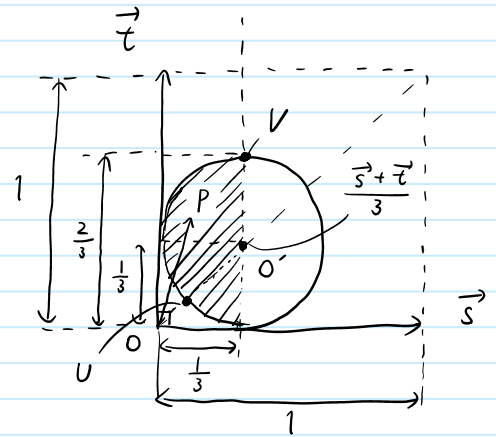
である.

これを満たす $\vec{p}$ の領域を図示すると右図.

ただし, 境界線を含み.

$|\vec{p}|$ が最小となるのは $\vec{p}$ が図の点 U を表すときであり, このとき $\vec{OO'} = \frac{\vec{s} + \vec{t}}{3}$ とおく

$$\begin{aligned} |\vec{p}| &= OO' - OU \\ &= \frac{\sqrt{2} - 1}{3} \end{aligned}$$



である. また, $|\vec{p}|$ が最大となるのは $\vec{p}$ が図の点 V を表すときであり, このとき

$$|\vec{p}| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

である. したがって,

$$\underline{\underline{\frac{\sqrt{2} - 1}{3}}} \leq |\vec{p}| \leq \underline{\underline{\frac{\sqrt{5}}{3}}}.$$

3

P を座標平面上の点とし、点 P の座標を (a, b) とする。 $-\pi \leq t \leq \pi$ の範囲にある実数 t のうち、曲線 $y = \cos x$ 上の点 $(t, \cos t)$ における接線が点 P を通るという条件をみたすものの個数を $N(P)$ とする。 $N(P) = 4$ かつ $0 < a < \pi$ を満たすような点 P の存在範囲を座標平面上に図示せよ。

$y = \cos x$ に対して $y' = -\sin x$ より、 $y = \cos x$ の点 $(t, \cos t)$ における接線の方程式は

$$y - \cos t = -\sin t (x - t)$$

この点 (a, b) を通るため、

$$b - \cos t = -\sin t (a - t)$$

整理して、

$$(t - a) \cdot \sin t + \cos t = b$$

$f(t) = (t - a) \cdot \sin t + \cos t$ とおくと、方程式 $f(t) = b$ が $-\pi \leq t \leq \pi$ の範囲で異なる 4 つの実数解をもつような (a, b) の条件を求めればよい。

$$f(t) = (t - a) \sin t + \cos t \quad (-\pi \leq t \leq \pi)$$

に対して、

$$\begin{aligned} f'(t) &= \sin t + (t - a) \cos t - \sin t \\ &= (t - a) \cos t \end{aligned}$$

(1) $0 < a < \frac{\pi}{2}$ のとき

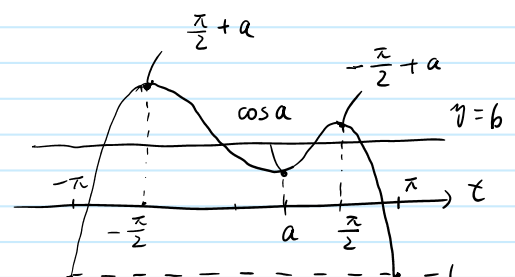
t	$-\pi$	$\dots$	$-\frac{\pi}{2}$	$\dots$	a	$\dots$	$\frac{\pi}{2}$	$\dots$	π
$f(t)$		+	0	-	0	+	0	-	
$f(t)$	-1	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2} + a$	$\searrow$	$\cos a$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2} - a$	$\searrow$	-1

より、 $y = f(t)$ のグラフの概形は左。

求める条件は、 $y = f(t)$ と $y = b$ の表す曲線が異なる 4 点で交わることから、

$$\cos a < b < -\frac{\pi}{2} + a$$

である。

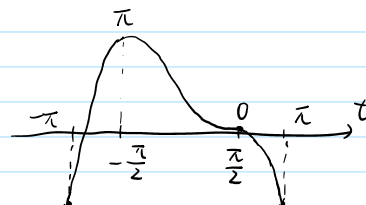


[2] $a = \frac{\pi}{2}$ のとき

同様に,

t	$-\pi$	$\dots$	$-\frac{\pi}{2}$	$\dots$	$\frac{\pi}{2}$	$\dots$	π
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$-$	
$f(t)$	-1	$\searrow$	π	$\searrow$	0	0	-1

このとき、 $y = f(t)$ のグラフの概形は左。
 よって、 $y = f(t)$ と $y = b$ の交点曲線は、高々 2 点と
 交わるので、題意を満たす (a, b) は存在しない。



[3] $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ のとき

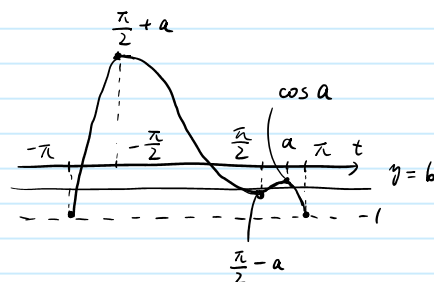
同様に,

t	$-\pi$	$\dots$	$-\frac{\pi}{2}$	$\dots$	$\frac{\pi}{2}$	$\dots$	a	$\dots$	π
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(t)$	-1	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2} + a$	$\searrow$	$\frac{\pi}{2} - a$	$\nearrow$	$\cos a$	$\searrow$	-1

(i) $\frac{\pi}{2} - a > -1$ すなわち $\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2} + 1$ のとき

$y = f(t)$ のグラフの概形は右図。よって,

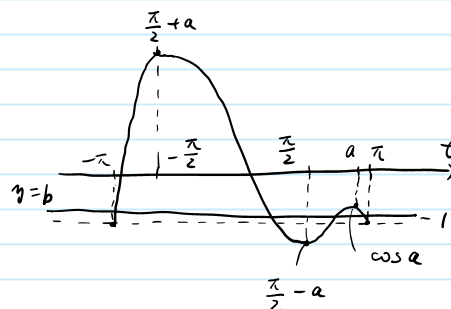
$$\frac{\pi}{2} - a < b < \cos a.$$



(ii) $\frac{\pi}{2} - a \leq -1$ すなわち $\frac{\pi}{2} + 1 \leq a < \pi$ のとき

$y = f(t)$ のグラフの概形は右図。よって,

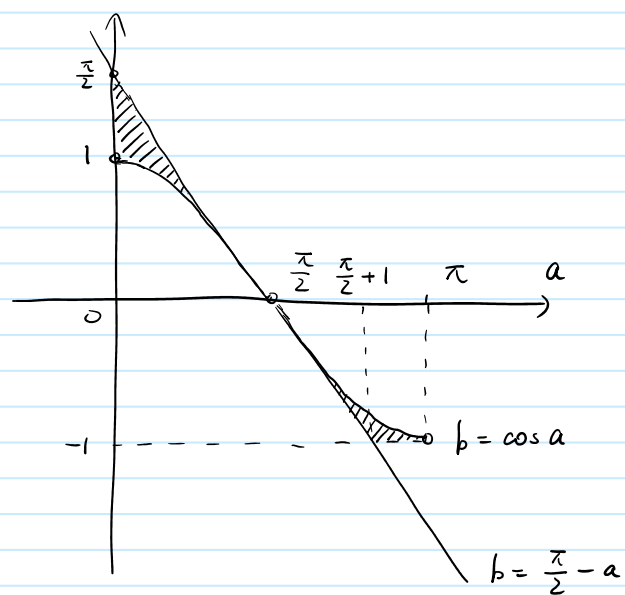
$$-1 < b < \cos a.$$



よって、(1)(2)(3)より

$$\begin{cases} \cos a < b < \frac{\pi}{2} - a & (0 < a < \frac{\pi}{2}) \\ \frac{\pi}{2} - a < b < \cos a & (\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2} + 1) \\ -1 < b < \cos a & (\frac{\pi}{2} + 1 \leq a < \pi) \end{cases}$$

したがって、求める領域は以下である。



※ 境界線を含まない。□

4

a, b を $a^2 + b^2 > 1$ かつ $b \neq 0$ をみたす実数の定数とする。座標空間の点 $A(a, 0, b)$ と点 $P(x, y, 0)$ をとる。点 $O(0, 0, 0)$ を通り直線 AP と垂直な平面を α とし、平面 α と直線 AP との交点を Q とする。

- (1) $(\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AO})^2 = |\overrightarrow{AP}|^2 |\overrightarrow{AQ}|^2$ が成り立つことを示せ。
- (2) $|\overrightarrow{OQ}| = 1$ をみたすように点 $P(x, y, 0)$ が xy 平面上を動くとき、点 P の軌跡を求めよ。

(1) 平面 α の法線ベクトルは $\vec{n} = \overrightarrow{AP}$ であり、

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \overrightarrow{AP} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-a \\ y \\ -b \end{pmatrix}\end{aligned}$$

である。

α は点 O を含むので、 α 上の任意の点 (X, Y, Z) は

$$(x-a)X + yY + (-b)Z = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

を満たす。

点 Q の座標を求めると、 $\overrightarrow{AQ} = k \overrightarrow{AP}$ を満たす k が存在することより

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} \\ &= \overrightarrow{OA} + k \overrightarrow{AP} \\ &= \begin{pmatrix} kx + (1-k)a \\ y \cdot k \\ (1-k)b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx + (1-k)a \\ ky \\ (1-k)b \end{pmatrix}\end{aligned}$$

と表せる。一方、 Q は α 上の点より

$$(x-a) \cdot (kx + (1-k)a) + y \cdot ky + (-b) \cdot (1-k)b = 0$$

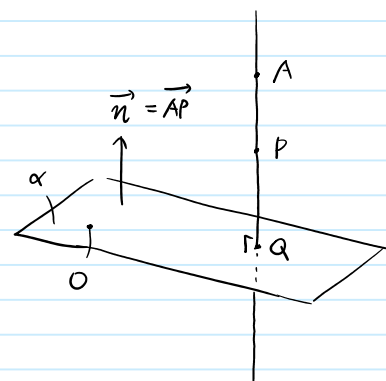
これを k について解くと、

$$\begin{aligned}\{(x-a)^2 + y^2 + b^2\}k &= a^2 - ax + b^2 \\ \therefore k &= \frac{a^2 - ax + b^2}{(x-a)^2 + y^2 + b^2} \quad \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

を得る。

よって、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AP}|^2 \cdot |\overrightarrow{AQ}|^2 &= k^2 \cdot |\overrightarrow{AP}|^2 \cdot |\overrightarrow{AP}|^2 \\ &= \frac{(a^2 - ax + b^2)^2}{\{(x-a)^2 + y^2 + b^2\}^2} \cdot \{(x-a)^2 + y^2 + b^2\}^2 = (a^2 - ax + b^2)^2\end{aligned}$$



一方,

$$(\vec{AP} \cdot \vec{AQ})^2 = \left(\begin{pmatrix} x-a \\ y \\ -b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ -b \end{pmatrix} \right)^2$$

$$= (a^2 - ax + b^2)^2$$

たゞし, $(\vec{AP} \cdot \vec{AQ})^2 = |\vec{AP}|^2 |\vec{AQ}|^2$ が示された。□

(2) 右図における三平方の定理より. $|\vec{OQ}|^2 = |\vec{OA}|^2 - |\vec{AQ}|^2$

これと (1) の結果より.

$$|\vec{OQ}|^2 = 1$$

$$|\vec{OA}|^2 - |\vec{AQ}|^2 = 1$$

$$|\vec{OA}|^2 - \frac{(\vec{AP} \cdot \vec{AO})^2}{|\vec{AP}|^2} = 1$$

$$a^2 + b^2 - \frac{(a(a-x) + b^2)^2}{(x-a)^2 + y^2 + b^2} = 1 \quad \left(\because \vec{AP} = \begin{pmatrix} x-a \\ y \\ -b \end{pmatrix}, \vec{AO} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ -b \end{pmatrix} \right)$$

$$(a^2 + b^2 - 1) \{ (x-a)^2 + y^2 + b^2 \} = a^2(x-a)^2 + 2a(a-x)b^2 + b^4$$

$$(b^2 - 1)(x-a)^2 + 2ab^2(x-a) + (a^2 + b^2 - 1)y^2 + (a^2 - 1)b^2 = 0$$

(1) $b = \pm 1$ のとき

$$2a(x-a) + a^2 y^2 + (a^2 - 1) = 0$$

$a^2 + b^2 > 1$, $b^2 = 1$ より $a^2 > 0$ たゞし,

$$y^2 = -\frac{2}{a}(x-a) + \left(\frac{1}{a^2} - 1\right)$$

$$\therefore \text{放物線} \quad \underline{\underline{y^2 = -\frac{2}{a}(x-a) + \left(\frac{1}{a^2} + 1\right)}} \quad (b = \pm 1)$$

(2) $b \neq \pm 1$ のとき

$$(x-a)^2 + \frac{2ab^2(x-a)}{(b^2-1)} + \frac{a^2+b^2-1}{b^2-1} y^2 = \frac{b^2(1-a^2)}{b^2-1}$$

$$\text{整理して} \quad \left(x-a + \frac{ab^2}{b^2-1}\right)^2 + \frac{a^2+b^2-1}{b^2-1} y^2 = \frac{b^2(a^2+b^2-1)}{b^2-1}$$

$$\text{すなわち} \quad \underline{\underline{\frac{b^2-1}{b^2(a^2+b^2-1)} \left(x-a + \frac{ab^2}{b^2-1}\right)^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1}} \quad (b \neq \pm 1)$$

を描く。□

5

1 個のさいころを n 回投げて、 k 回目に出た目を a_k とする。 b_n を

$$b_n = \sum_{k=1}^n a_1^{n-k} a_k$$

により定義し、 b_n が 7 の倍数となる確率を p_n とする。

- (1) p_1, p_2 を求めよ。
- (2) 数列 $\{p_n\}$ の一般項を求めよ。

$$\begin{aligned} b_n &= a_1^n + a_1^{n-2} \cdot a_2 + a_1^{n-3} \cdot a_3 + \cdots + a_1 a_{n-1} + a_n \\ &\equiv a_1 (a_1^{n-1} + a_1^{n-3} a_2 + a_1^{n-4} a_3 + \cdots + a_{n-1}) + a_n \quad (n \geq 2) \\ &= a_1 b_{n-1} + a_n \quad (n \geq 2) \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

- (1) p_1 : a_1 が 7 の倍数になる確率であり、さいころの目は 1, 2, ..., 6 だから
 $p_1 = 0$.

p_2 : $a_1^2 + a_2$ が 7 の倍数になる確率であり、

$$a_1 \equiv 1, 2, 3, 4, 5, 6 \pmod{7}$$

に対して、 $a_1^2 \equiv 1, 4, 2, 2, 4, 1 \pmod{7}$ である。 $a_1^2 \equiv 1$ のとき、

$b_2 = a_1^2 + a_2$ が 7 の倍数になる a_2 は 6 のみ、同様に $a_1^2 \equiv 2, 4$ のとき

b_2 が 7 の倍数になる a_2 はそれぞれ 5, 3 のみ。すなわち、 a_1 が 1 になる場合

も含め、そのそれぞれに対して b_2 が 7 の倍数になる a_2 の出方は 1 通り。

よって、 $p_2 = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$.

- (2) (i) b_{n-1} が 7 の倍数のとき $(n \geq 2)$

①において、 $a_1 b_{n-1}$ も 7 の倍数。一方、 $a_n \in \{1, 2, \dots, 6\}$ より、

$$b_n \equiv a_1 b_{n-1} + a_n \pmod{7} \equiv a_n \pmod{7} = 1, 2, \dots, 6 \pmod{7}$$

より、常に b_n は 7 の倍数でない。

- (ii) b_{n-1} が 7 の倍数でないとき

$b_{n-1} \equiv 1, 2, 3, 4, 5, 6 \pmod{7}$ のいずれかであり. a_1, b_{n-1} の 7 乗法による合同式の値は以下のようになる.

$a_1 \backslash b_{n-1}$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

$$b_n = a_1 b_{n-1} + a_n \text{ が } 7 \text{ の倍数のとき,}$$

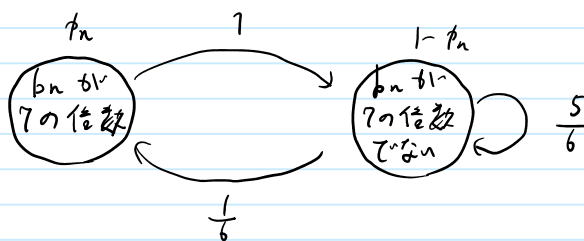
$$0 \equiv a_1 b_{n-1} + a_n \pmod{7}$$

$$\therefore a_n \equiv -a_1 b_{n-1} \pmod{7}$$

よって, b_n を 7 の倍数にするような a_n の値は以下.

$a_1 \backslash b_{n-1}$	1	2	3	4	5	6
1	6	5	4	3	2	1
2	5	3	1	6	4	2
3	4	1	5	2	6	3
4	3	6	2	5	1	4
5	2	4	6	1	3	5
6	1	2	3	4	5	6

すなわち, 異なる (a_1, b_{n-1}) の組み合わせにおいても, 常に b_n を 7 の倍数にするような a_n の場合の数は 1 通りだから, b_n は常に確率 $\frac{1}{6}$ で 7 の倍数になる.



よって, $p_n = \frac{1}{6} (1 - p_{n-1}) \quad (n \geq 2)$. 特性方程式 $x = \frac{1}{6} (1 - x)$

より $x = \frac{1}{7}$ を得るので

$$p_n - \frac{1}{7} = \left(-\frac{1}{6}\right) \left(p_{n-1} - \frac{1}{7}\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{6}\right)^2 \left(p_{n-2} - \frac{1}{7}\right)$$

$$= \dots$$

$$= \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} \left(p_1 - \frac{1}{7}\right) = -\frac{1}{7} \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} \quad (\because p_1 = 0)$$

$\therefore p_n = \frac{1}{7} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} \right\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ を得る. $\square$