[1]

I. 時刻 t における A の速度 (v_x, v_y) および位置 (x, y) は

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos\theta \\ v_y(t) = v_0 \sin\theta - gt \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = v_0 t \cos\theta \\ y(t) = v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

問1 最高点に達する時刻 t_0 は $v_y(t_0) = 0$ を満たすので

$$v_0 \sin\theta - g t_0 = 0$$

$$\therefore \quad t_0 = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

よって,

$$y(t_0) = v_0 \cdot \frac{v_0 \sin^2\theta}{g} - \frac{1}{2} g \cdot \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g^2} = \boxed{\frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}}.$$

問2 $t = 2t_0$ において A は地面に落下する. よって, 求める距離は

$$x(2t_0) = v_0 \cdot \frac{2 v_0 \sin\theta}{g} \cdot \cos\theta = \boxed{\frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}}$$

問3 問2の結果が最大のとき $\sin 2\theta = 1$ $\quad\therefore\ 2\theta = \frac{\pi}{2}$ より $\theta = \boxed{\frac{\pi}{4}}$ rad.

問4 k 回目に地面と衝突した直後の A の y 方向の速度を $v_{y0}^{(k)}$ とする. ただし, 便宜上 $v_y^{(0)} = v_0 \sin\theta$ とする. また, l_k を k 回目に地面と衝突した直後と $(k+1)$ 回目に地面に衝突する直前の間に小球が水平方向に進む距離とする.

反発係数 e より, $v_{y0}^{(k)} = e^k v_{y0}^{(0)} = e^k v_0 \sin\theta$. また, 問2と同様に考えて

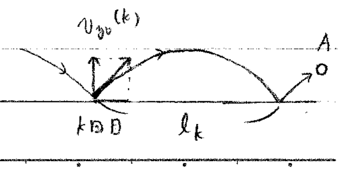
$$l_k = v_0 \cdot \frac{2 v_{y0}^{(k)}}{g} \cdot \cos\theta = \frac{2 v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g} \cdot e^k$$

$$= e^k \cdot \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

∴ 求める水平距離は

$$\sum_{k=0}^{n-1} l_k = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \sum_{k=0}^{n-1} e^k$$

$$= \boxed{\frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \cdot \frac{1 - e^n}{1 - e}}$$



II

問5　力学的エネルギー保存則 および x, y 方向の運動量保存則 より
（衝突は極めて短い時間で生じているとし，衝突の間の重力による力積は無視した）

$$\begin{cases} \frac{1}{2}MV_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 & \cdots ① \\ MV_0 = mv\cos\theta + MV\cos\phi & \cdots ② \\ 0 = mv\sin\theta - MV\sin\phi & \cdots ③ \end{cases}$$

②③より
$$\begin{cases} MV\cos\phi = MV_0 - mv\cos\theta \\ MV\sin\phi = mv\sin\theta \end{cases}$$

$$\therefore \quad M^2V^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = (MV_0 - mv\cos\theta)^2 + (mv\sin\theta)^2$$
$$M^2V^2 = M^2V_0^2 - 2MmvV_0\cos\theta + m^2v^2$$

これを，① の両辺に M を乗じてから ① に代入すると
$$\frac{1}{2}M^2V_0^2 = \frac{1}{2}Mmv^2 + \frac{1}{2}(M^2V_0^2 - 2MmvV_0\cos\theta + m^2v^2)$$
整理して $v \neq 0$ に注意して
$$v = \boxed{\frac{2M\cos\theta}{M+m}V_0}$$
を得る．□

問6　問2の v_0 を v におきかえればよい．
$$L = \frac{v^2}{g}\sin 2\theta = \boxed{\frac{4M^2\cos^2\theta\cdot\sin 2\theta}{(M+m)^2 g}V_0^2}$$

問7 (a) 前問の結果より　$\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ より } \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} \text{ に注意して.}\right)$

$$L^2 = \frac{16M^4(\cos^2\theta)^2(2\sqrt{1-\cos^2\theta}\cdot\cos\theta)^2}{(M+m)^4\cdot g^2}V_0^4$$
$$Z = \frac{16M^4 d^2\cdot 4\cdot(1-d)\cdot d\, V_0^4}{(M+m)^4 g^2} \quad (\because d = \cos^2\theta)$$
$$= \frac{64M^4V_0^4}{(M+m)^4 g^2}(d^3 - d^4)$$

$z(d+\Delta d) - z(d)$ の項は (Δd) の整式となる（$(\Delta d)^{1.5}$ などを含まない）ので
$(\Delta d)^n$ $(n>1)$ の項を無視する操作は $(\Delta d)^2$, $(\Delta d)^3$, … を無視することを意味し，これは微分の操作に他ならないので $(d^3 - d^4)' = (3d^2 - 4d^3)$ より

$$\Delta z = \boxed{\frac{64M^4}{(M+m)^4 g^2}(3d^2 - 4d^3)\,\Delta d}.$$

(b) $3d^2 - 4d^3 = 0$, $d \neq 0$ より $d = \cos^2\theta = \frac{3}{4}$ $\therefore$ $\cos\theta = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

III

問8 (c) $\Delta x_A = \Delta y_A = 0$, $\Delta x_B = V_0 \Delta t$, $\Delta y_B = 0$ より

$$(\Delta x_G, \Delta y_G) = \left(\frac{m\Delta x_A + M\Delta x_B}{m+M}, \frac{m\Delta y_A + M\Delta y_B}{m+M}\right)$$

$$= \left(\boxed{\frac{MV_0}{m+M}\Delta t}, 0\right)$$

(d) (c) より $\left(\frac{\Delta x_G}{\Delta t}, \frac{\Delta y_G}{\Delta t}\right) = \left(\boxed{\frac{MV_0}{m+M}}, 0\right)$

(e) $\vec{v_G} = (v_{Gx}, v_{Gy}) = \left(\frac{\Delta x_G}{\Delta t}, \frac{\Delta y_G}{\Delta t}\right)$ とすると，

PからみたAの速度 $\overrightarrow{v_{PA}} = \vec{v_A} - \vec{v_G}$

$$= (0, 0) - \left(\frac{MV_0}{m+M}, 0\right) = \left(\boxed{-\frac{MV_0}{m+M}}, 0\right)$$

(f) PからみたBの速度 $\overrightarrow{v_{PB}} = \vec{v_B} - \vec{v_G}$

$$= (V_0, 0) - \left(\frac{MV_0}{m+M}, 0\right)$$

$$= \left(\boxed{\frac{mV_0}{m+M}}, 0\right)$$

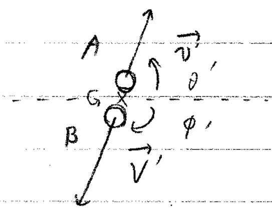
である。

問9　衝突の直前と直後において、

$$\vec{v'} = \vec{v} - \vec{v_G}$$
$$= \vec{v} - \frac{m\vec{v} + M\vec{V}}{M+m}$$
$$= \frac{M}{M+m}(\vec{v} - \vec{V}) \quad \cdots ④$$

$$\vec{V'} = \vec{V} - \vec{v_G}$$
$$= \vec{V} - \frac{m\vec{v} + M\vec{V}}{M+m}$$
$$= -\frac{m}{M+m}(\vec{v} - \vec{V}) \quad \cdots ⑤$$

④⑤より、$\vec{v'}, \vec{V'}$ は共線条件を満たすので、
$\vec{v'}, \vec{V'}$ は一直線上にあり、互いに逆向きで
ある．よって　$\theta' + \phi' = \pi$　より
$$\sin(\theta' + \phi') = \boxed{0}$$



また④⑤より
$$m\vec{v'} + M\vec{V'} = \vec{0}$$
$$m\vec{v'} = -M\vec{V'}$$ 両辺絶対値をとって $mv' = MV'$ …⑥

一方、衝突前後で $|\vec{v_G}|$ が変化しないので、重心まわりの系のエネルギーの
保存則より（問8の結果を用いて）

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{MV_0}{M+m}\right)^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{mV_0}{M+m}\right)^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}MV'^2 \quad ⑦$$

⑦と⑥より $(v', V') = \left(\pm\frac{MV_0}{M+m}, \pm\frac{mV_0}{M+m}\right)$　（複号同順）は
は これら2式を満たし、かつ⑥⑦より得られる v'（あるいは V'）についての方程式は
2次だから、これらは⑥⑦の解として十分である．$v' > 0$, $V' > 0$ より、

$$v' = \boxed{\frac{MV_0}{M+m}}, \quad V' = \boxed{\frac{mV_0}{M+m}}$$

問10　②③より

$$\begin{cases} MV_0 - MV\cos\phi & m v\cos\theta \\ MV\sin\phi & = \quad m v\sin\theta \end{cases}$$

両辺2乗して加えることにより

$$M^2V_0^2 - 2M^2V_0V\cos\phi + M^2V^2 = m^2v^2$$

①より

$$MmV_0^2 - MmV^2 = m^2v^2$$

これら2式の辺々引いてMで割って,

$$(M-m)V_0^2 - 2MV_0V\cos\phi + mV^2 + MV^2 = 0$$

$$(M+m)V^2 - (2MV_0\cos\phi)V + (M-m)V_0^2 = 0 \quad \cdots ⑧$$

Vが実数として存在するには, ⑧について(判別式) ≧ 0 より

$$(MV_0\cos\phi)^2 - (M+m)(M-m)V_0^2 \geqq 0$$

$$M^2\cos^2\phi \geqq M^2 - m^2$$

$$\frac{M^2}{1+\tan^2\phi} \geqq M^2 - m^2$$

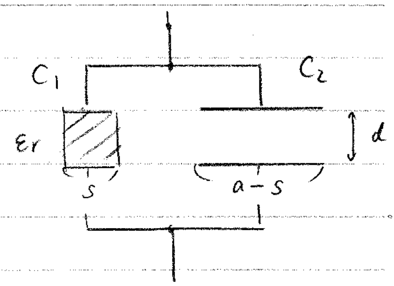
これを $M > m$ のもとで解いて　$\tan^2\phi \leqq \dfrac{m^2}{M^2-m^2}$

$$\therefore \tan\phi \leqq \boxed{\frac{m}{\sqrt{M^2-m^2}}}$$ を得る. □

[2]

I

問1 右図のコンデンサー C_1, C_2 の合成容量 $C(s)$ に対して、$Q = C(s) \cdot V$ が求める電気量.



$$C_1 = \varepsilon_r \varepsilon_0 \cdot \frac{sb}{d}$$

$$C_2 = \varepsilon_0 \frac{(a-s)b}{d}$$

$$\therefore \quad C(s) = C_1 + C_2 = \varepsilon_0 \cdot \frac{b}{d} \{ \varepsilon_r s + (a-s) \}$$

$$= \frac{\varepsilon_0 b \{ a + (\varepsilon_r - 1) s \}}{d}$$

よって $Q(s) = C(s) V = \boxed{\frac{\varepsilon_0 b \{ a + (\varepsilon_r - 1) s \}}{d} V}$ である. □

問2 挿入長が $s \to s + v_s \Delta t$ となったことによる電荷量の変化 ΔQ は

$$\Delta Q = \frac{\varepsilon_0 b \{ a + (\varepsilon_r - 1)(s + v_s \Delta t) \}}{d} V - \frac{\varepsilon_0 b \{ a + (\varepsilon_r - 1) s \}}{d} V$$

$$= \frac{\varepsilon_0 b (\varepsilon_r - 1) v_s \Delta t}{d} V$$

$$\therefore \quad I_A = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \boxed{\frac{\varepsilon_0 b (\varepsilon_r - 1) v_s V}{d}}$$

また、$\Delta Q > 0$ より A に流入する I が生じたので、$\boxed{(i)}$ の向き.

問3 求める H は $H = \boxed{\frac{I_A}{2R_A}}$. 向きは右ねじの法則を適用して $\boxed{(イ)}$

問4　コイルBに生じる誘導起電力の大きさは

$$V_B = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{\Delta(\mu_0 H)\cdot \pi R_B^2}{\Delta t} = \mu_0 \pi R_B^2 \cdot \frac{\Delta H}{\Delta t} \quad \cdots ①$$

ここで 問2, 問3の結果より

$$H(t) = \frac{\varepsilon_0 b(\varepsilon_r - 1) v_s V}{2R_A d}$$

速度が $v_s \to v_s + p\Delta t$ になったことによる Hの変化 ΔH は

$$\Delta H = \frac{\varepsilon_0 b(\varepsilon_r - 1)(v_s + p\Delta t)V}{2R_A d} - \frac{\varepsilon_0 b(\varepsilon_r - 1) v_s V}{2R_A d}$$

$$= \frac{\varepsilon_0 b(\varepsilon_r - 1) p V}{2R_A d}\Delta t \quad \cdots ②$$

∴ ①②より

$$V_B = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \mu_0 \pi R_B^2 \cdot \frac{\Delta H}{\Delta t}$$

$$= \mu_0 \pi R_B^2 \cdot \frac{\varepsilon_0 b(\varepsilon_r - 1) p V}{2R_A d}$$

$$= \frac{\pi \varepsilon_0 \mu_0 (\varepsilon_r - 1) R_B^2 b p V}{2R_A d}$$

よって, 生じる電流 I_Bは　$I_B = \dfrac{V_B}{r} = \boxed{\dfrac{\pi \varepsilon_0 \mu_0 (\varepsilon_r - 1) R_B^2 b p V}{2R_A r d}}$.

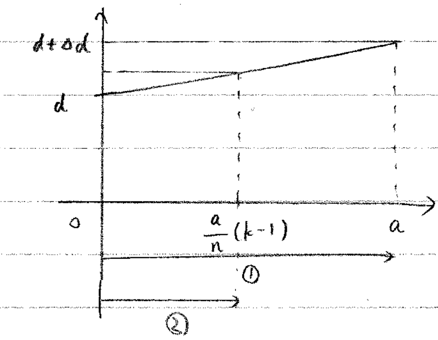
Iの向きは, レンツの法則より $\boxed{(\text{い})}$.

問5　問4より電流は常に一定だから、誘電体の挿入に要した時間を T として求めるエネルギーは $I_{B0}^2 r T$. （I_{B0} は問4で求めた値のことである）。

ここで、誘電体の時刻 t における位置が（加速度 p, 初速度 0 で挿入するので）$\frac{1}{2}pt^2$ であることから $\frac{1}{2}pT^2 = a$ $\therefore T = \sqrt{\frac{2a}{p}}$. よって、$\boxed{I_{B0}^2 r \cdot \sqrt{\frac{2a}{p}}}$ が求めるエネルギー。

II

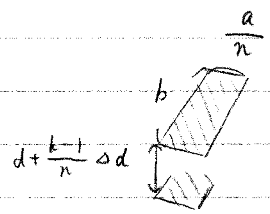
問6 (a)　右図より



$$d + \Delta d \cdot \frac{\frac{a}{n}(k-1)}{a}$$

$$= \boxed{d + \frac{k-1}{n}\Delta d}$$

(b)　C_k は (a) の結果を用いて



$$C_k = \varepsilon_0 \cdot \frac{\frac{a}{n}\,b}{d + \frac{k-1}{n}\Delta d}$$

$$= \frac{\varepsilon_0 ab}{nd} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\Delta d}{d}\cdot\frac{k-1}{n}}$$

と表せる。よって、$C_1, C_2, \cdots, C_n$ を並列に接続したコンデンサーの合成容量として C' を得ることによって、

$$C' = \sum_{k=1}^{n} \boxed{\frac{\varepsilon_0 ab}{nd} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\Delta d}{d}\cdot\frac{k-1}{n}}}$$

(c)　(b) を近似式により計算すると、$d \gg \Delta d$ に注意して

$$C' = \frac{\varepsilon_0 ab}{d}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1 + \frac{\Delta d}{d}\cdot\frac{k-1}{n}}\right)$$

$$= \frac{\varepsilon_0 ab}{d}\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta d}{d}\right) = \boxed{\frac{\varepsilon_0 ab}{d}\left(1 - \frac{\Delta d}{2d}\right)}$$

問7　図4の C_k に蓄えられる電荷 q_k は 問6(b)において $x = \frac{a}{n}(k-1)$ として
その結果を用いることにより

$$q_k = C_k V$$

$$= \frac{\varepsilon_0 ab}{n} \cdot \frac{V}{d + \Delta d \cdot \frac{x}{a}}$$

よって，求める値は $\dfrac{q_k}{\frac{a}{n} \cdot b}$ より

$$\frac{q_k}{\frac{a}{n} \cdot b} = \varepsilon_0 \cdot \frac{V}{d + \Delta d \cdot \frac{x}{a}}$$

$$= \boxed{\frac{\varepsilon_0 aV}{ad + x \cdot \Delta d}}$$

である。

問8　問7の結果より，σ は

$$\sigma(x) = \frac{\varepsilon_0 aV}{ad + x \Delta d}$$

だから，x に関して単調減少。また，$\sigma(0) = \varepsilon_0 \dfrac{V}{d}$ である。一方
変形前の $\sigma = \sigma_0$ を求めると

$$\sigma_0 = \frac{Q}{ab} = \frac{CV}{ab}$$

$$= \frac{\varepsilon_0 \frac{ab}{d} \cdot V}{ab} = \varepsilon_0 \frac{V}{d}$$

より，$\sigma(0) = \sigma_0$ である。これらをともに満たすのは (え) である。

問9　時刻 t において，極板間距離 Δd は 初速度0，加速度 $\frac{g}{2}\cdot 2 = g$ で大きくなるので

$$\Delta d = \frac{1}{2}\cdot g t^2 = \frac{gt^2}{2}$$

である．よって，時刻 t においてコンデンサーに蓄えられる電荷 $Q'(t)$ は問6(b)の結果から

$$Q'(t) = C'\cdot V = \frac{\varepsilon_0 ab}{d}\left(1 - \frac{gt^2}{4d}\right)V$$

より，時刻 t においてコイル A に生じる電流 I_A' は

$$I_A'(t) = \frac{dQ'(t)}{dt} = \frac{\varepsilon_0 ab}{d}\cdot\left(-\frac{gt}{2d}\right)V$$

$$= -\frac{\varepsilon_0 abgV}{2d^2}t$$

となる．

一方，このとき コイルBの中心に生じる磁界は $H' = \frac{|I_A'(t)|}{2R_A}$ より

磁束密度は $\mu_0 H' = \mu_0\cdot\frac{|I_A'(t)|}{2R_A}$，よって，コイルBに生じる

誘導起電力の大きさ V' は

$$V' = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}(|I_A'(t)|)\cdot\frac{\mu_0}{2R_A}\cdot\pi R_B^2$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\varepsilon_0 abgV}{2d^2}t\right)\cdot\frac{\mu_0}{2R_A}\cdot\pi R_B^2$$

$$= \frac{\pi\varepsilon_0\mu_0\, ab\, g\, R_B^2 V}{4R_A d^2}$$

である．したがって，コイルBに生じる電流の大きさ I_B' は

$$I_B' = \frac{V'}{r} = \boxed{\frac{\pi\varepsilon_0\mu_0\, ab\, g\, R_B^2 V}{4rR_A d^2}}$$

である．□

[3] A

問1　密度 ρ の流体中に存在する体積 V の空間にはたらく浮力は $\rho V g$ より、
単位体積あたりの空間にはたらく浮力は ρg. よって、大気圧の密度 ρ_0 を求める.
n モルの大気の体積を V_0、密度を ρ_0 とすると 状態方程式より

$$p_0 V_0 = nRT_0$$

$$Mp_0 V_0 = nMRT_0$$

$$\therefore \quad \rho_0 = \frac{nM}{V_0} = \frac{Mp_0}{RT_0} \qquad \therefore \quad \rho_0 g = \boxed{\frac{Mp_0}{RT_0} g}.$$

問2　A, B は常に圧力、温度が等しいので「$pV = nRT$」より A, B の体積も常に等しいことに注意する。A (B) の $T = T_0$, T_1 における体積をそれぞれ V_0, V_1 とすると、気体 A, B にはたらく重力の和は

$$nM_A g + nM_B g \quad \cdots ①$$

また、問1の結果より $T = T_1$ において気体 A, B にはたらく浮力は

$$2\rho_0 V_1 g = \frac{2Mp_0 g}{RT_0} \cdot V_{A1} \quad \cdots ②$$

温度 $T_0 \to T_1$ の変化過程は定温過程より

$$T_1 = \frac{V_1}{V_0} T_0$$

$$= \frac{V_1}{\frac{nRT_0}{p_0}} T_0 \qquad \left(\because \text{状態方程式} \quad p_0 \cdot V_{A0} = nRT_0 \right)$$

$$\therefore \quad V_1 = \frac{nR}{p_0} T_1 \quad \cdots ③$$

$T = T_1$ において ①② が等しくなるので

$$n(M_A + M_B) g = \frac{2Mp_0 g}{RT_0} V_1 \quad \Big) \text{③より}$$

$$= \frac{2Mp_0 g}{RT_0} \cdot \frac{nR}{p_0} T_1 = 2M \cdot n \frac{T_1}{T_0}$$

$$\therefore \quad T_1 = \boxed{\frac{M_A + M_B}{2M} T_0}$$

を得る。□

問3　温度 $T_0 \to T_1$ の過程は定圧過程より　求める Q は　与えられた定圧モル比熱により

$$Q = n \cdot \frac{5}{2} R (T_1 - T_0) + n \cdot \frac{7}{2} R (T_1 - T_0)$$

$$= 6nR(T_1 - T_0)$$

$$= 6nR \frac{M_A + M_B - 2M}{2M} T_0$$

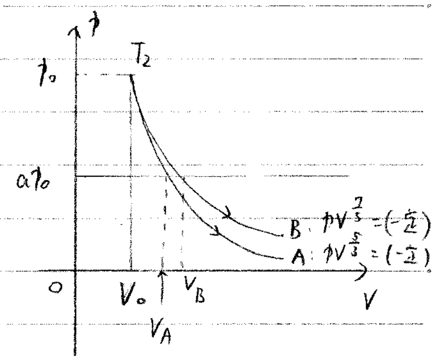
$$= \boxed{\frac{3nR(M_A + M_B - 2M)}{M} T_0}$$

である。□

問4　気体A：　$pV^{\frac{5}{3}} = (一定)$

気体B：　$pV^{\frac{7}{5}} = (一定)$

より、p-V図は右。よって、静止した気体A,Bの体積 V_A, V_B は



$$p_0 V_0^{\frac{5}{3}} = a p_0 \cdot V_A^{\frac{5}{3}}$$

$$\therefore V_A = \frac{V_0}{a^{\frac{3}{5}}}$$

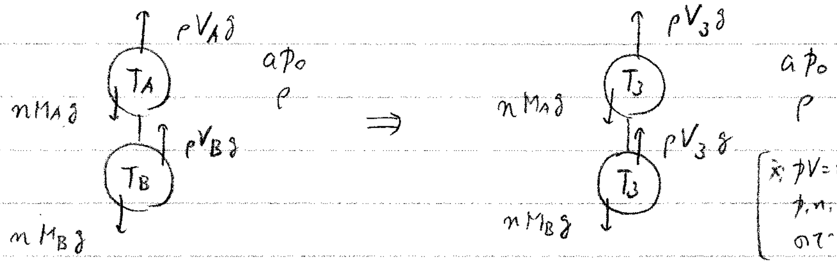
同様に、　$V_B = \frac{V_0}{a^{\frac{5}{7}}}$　である。∴「$\frac{pV}{T} = (一定)$」より

$$\frac{p_0 V_0}{T_2} = \frac{a p_0 V_A}{T_A} = \frac{a p_0 V_B}{T_B}$$

$$\begin{cases} T_A = a \frac{V_A}{V_0} \cdot T_2 = \boxed{a^{\frac{2}{5}} T_2} \\ T_B = a \frac{V_B}{V_0} T_2 = \boxed{a^{\frac{2}{7}} T_2} \end{cases}$$

である。

問5



(∵ $pV=nRT$ において p, n, R, T が一致するので A, B の体積は)

気体の質量は常に一定より、問4、問5のそれぞれの状態において、A, B それぞれにはたらく浮力の和が一致する。この高度における大気の密度を ρ、$T=T_3$ のときの A, B の体積を V_3 として

$$\rho V_A g + \rho V_B g = 2\rho V_3 g \quad (= nM_A g + nM_B g)$$

$$\therefore \quad V_A + V_B = 2V_3$$

ここで、問4、問5の状態について、圧力は ap_0 で一致、n は一定、R は一定だから、状態方程式より

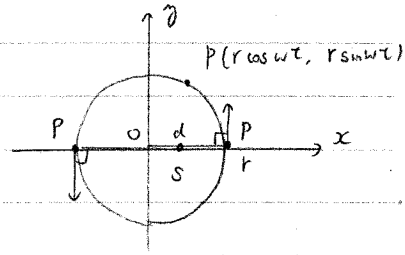
$$\frac{nRT_A}{ap_0} + \frac{nRT_B}{ap_0} = 2\cdot\frac{nRT_3}{ap_0}$$

$$\therefore \quad T_A + T_B = 2T_3$$

したがって、$T_3 = \boxed{\dfrac{T_A+T_B}{2}}$ を得る。□

[3] B

問6　Pの速度 $\vec{v}$ が $\overrightarrow{PS}$ と初めて直交するのは $\theta=\pi$ のとき。このときPは f_0 の周波数を観測するので、求める時刻は円運動の半周期より $\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{\omega}=\boxed{\frac{\pi}{\omega}}$.



問7　時刻 t において、問6図のように座標をとると $P(r\cos\omega t,\ r\sin\omega t)$ より

$$\vec{v}=\frac{d}{dt}(r\cos\omega t,\ r\sin\omega t)$$

$$=(-\omega r\sin\omega t,\ \omega r\cos\omega t)$$

である。また、

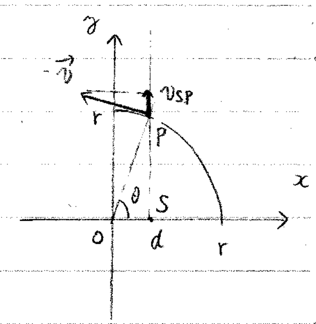
$$\overrightarrow{SP}=\begin{pmatrix} r\cos\omega t \\ r\sin\omega t \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r\cos\omega t-d \\ r\sin\omega t \end{pmatrix}$$

だから、$|\overrightarrow{SP}|=\sqrt{r^2-2rd\cos\omega t+d^2}$ に注意して

$$v_{SP}=\vec{v}\cdot\frac{\overrightarrow{SP}}{|\overrightarrow{SP}|}=\frac{-\omega r\sin\omega t(r\cos\omega t-d)+\omega r^2\sin\omega t\cos\omega t}{\sqrt{r^2-2rd\cos\omega t+d^2}}$$

$$=\boxed{\frac{\omega rd\sin\theta}{\sqrt{r^2-2rd\cos\theta+d^2}}}\quad(\theta=\omega t としている)$$

問8 (a)　$|v_{SP}|$ が初めて最大となるとき、観測者は最小の周波数を観測する。このとき $\cos\theta=\frac{d}{r}$ $(0<\theta<\pi)$ より、問7の結果から

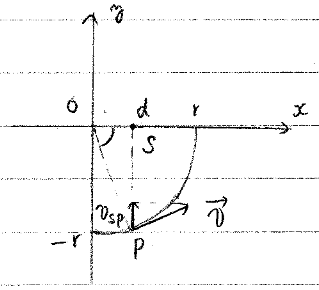


$$v_{SP}=\frac{\omega rd\cdot\sqrt{1-\left(\frac{d}{r}\right)^2}}{\sqrt{r^2-2rd\cdot\frac{d}{r}+d^2}}=\boxed{\omega d}$$

(b)　直線SP上において、ドップラー効果を考えることにより求める f_{min} は

$$f_{min}=\frac{V-v_{SP}}{V}f_0=\boxed{\frac{V-\omega d}{V}f_0}$$

問9　右図のように、$\cos\theta = \dfrac{d}{r}$ $(\pi < \theta < 2\pi)$ のとき



$|v_{SP}|$ は 2度目に最大となり。このとき P は最大の周波数を観測する。よって、求める f_{max} は

$$f_{max} = \frac{V + v_{SP}}{V} f_0$$

$$= \boxed{\frac{V + \omega d}{V} f_0}$$

問10　$r = 2d$ のとき、$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ より $\theta = \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5}{3}\pi$.

よって、問8から問9の状態に移る時間は、$\dfrac{5}{3}\pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{4}{3}\pi$ の角度を P が経る時間だから、

$$\frac{\frac{4}{3}\pi}{\omega} = \boxed{\frac{4\pi}{3\omega}}$$

である。□