

大阪公立大 2022 数学（理系）（前期日程） 分析・雑感

大阪市立・府立大が統合し、大阪公立大となってから初めての入試でした。理系数学に関して、問題の難易度、計算量が以前よりも難化・増加したとの情報を踏まえ、解答作成ののち、以下簡単な分析を行いました。

第1問 （Ⅲ 数列の極限，微分法の応用，積分法の応用 [やや難]）

問1は典型問題で、問2を解く際の重要な誘導になっています。問2のように n が指数の肩に乗っている場合は、迷わず対数をとってみましょう。

なお、決しておすすめはできませんが、問2では以下のように誘導に乗らずにロピタルの定理を用いることも可能です（ロピタルの定理の使用は検算程度にしておくのがよいでしょう）。

（問2の簡単な別解）

$u = 1/n$ とおくと、 $n \rightarrow \infty$ のとき $u \rightarrow +0$ であり、

$$nt - n^2 \log\left(1 + \frac{t}{n}\right) = \frac{ut - \log(1 + ut)}{u^2}$$

ここで、

- ・ $u \rightarrow +0$ のとき、 $ut - \log(1 + ut) \rightarrow 0$ 、 $u^2 \rightarrow 0$ よりともに 0 に収束する
- ・ $ut - \log(1 + ut)$ 、 u^2 は微分可能である

また、

$$\lim_{u \rightarrow +0} \frac{(ut - \log(1 + ut))'}{(u^2)'} = \lim_{u \rightarrow +0} \frac{t(1 + ut) - \frac{t}{1 + ut}}{2u} = \lim_{u \rightarrow +0} \frac{t^2}{2(1 + ut)} = \frac{t^2}{2}$$

より分子分母を微分して極限をとったとき、値が収束するので、ロピタルの定理より

$$\lim_{u \rightarrow +0} \frac{ut - \log(1 + ut)}{u^2} = \lim_{u \rightarrow +0} \frac{(ut - \log(1 + ut))'}{(u^2)'} = \frac{t^2}{2}$$

である。（以下、本解答に同じ）

問3はかなりの工夫が必要です。 e^{x^2} の形で表される関数は、原始関数を（初等関数としては）もたないことが知られています。そこで、不等式評価の際には「計算できる」積分の形に帰着させる必要があります。

本解答では、 $\frac{e^{5000}}{50} = \frac{2}{100} \cdot e^{\frac{100^2}{2}}$ と見てやることで、無理矢理 $\frac{2}{t} e^{\frac{t^2}{2}}$ の形を作り出しています。

$\frac{2}{t}e^{\frac{t^2}{2}}$ を微分すると $2\left(1 - \frac{1}{t^2}\right)e^{\frac{t^2}{2}}$ という形が現れるので、この関数を用いて $e^{\frac{t^2}{2}}$ の不等式評価を行い、証明を行っています。

なお、 $0 \leq t \leq 100$ においては $t^2/2 \leq 50t$ であることを用いて、 e の肩に乗る t の式を一次式まで落とし、積分できる形に落とし込むことでも証明できるようです。

この際は $\frac{e^{5000}}{50} = \frac{1}{50}e^{50 \cdot 100}$ と見てやり、 $\frac{1}{50}e^{50t}$ の形を作り出していると思われます。

第2問 (A・B 確率, 等比数列の一般項と和 [やや易])

このセットでは落とせない問題です。最後まで比較的易しめの典型的な問題が続くので、特筆事項はありませんが、問4だけ軽く言及しておきます。 E_n は数Bで扱われる（にも関わらず多くの大学で入試範囲から除外されるという憂き目に遭っている）「期待値」もどきです。この問題の設定では n は無限大まで取り得るので E_n は厳密な意味での期待値ではありません。そこで、実際に極限をとってみると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(7 - (n+6) \left(\frac{5}{6} \right)^{n-1} \right) = 7$$

となります。これは続けて同じ目が出るまでサイコロを振るという試行をひたすら繰り返すと、最終的には7回目で初めて続けて同じ目が出る人が多いかなあ、という結果になることを示しています。続けて同じ目が出る確率が $1/6$ であるので、はじめの一投を考慮して $1+6=7$ 回投げるときに初めて同じ目が出やすそう、という直感ともリンクしていて面白いのではないのでしょうか。

第3問 (A・Ⅲ 一次不定方程式, 約数, ド・モアブルの定理 [やや難])

問1, 問2までは具体的な設問ですが、問3, 問4からは抽象度が上がり、「ある」「すべて」に絡む論理力が問われています。この類の問題は解答を読めば理解できなくないが、いざ試験本番で解かされると意外と解けないことが多いのでは、と思われます。本問に関して言えば、 x, y は「存在するものと仮定」として与えられているので、躊躇せず $px + qy = 1$ という等式を用いて解答を完成させる必要がありました。一方、複素数平面の知識としては、そこまで高度なものは要求されていません。ただし、問4は偏角を比較するとき、 $\cos \theta + i \sin \theta$ の周期性を忘れないようにしましょう。

第4問 (Ⅱ・Ⅲ 三角関数, 媒介変数表示された曲線の傾き [難])

内サイクロイドに関する問題です。三角関数に関する計算力・応用力を問うていた印象です。複雑な式変形と不等式を用いた角度の評価の煩雑さ故に、試験という限られた時間では極めてハードに感じられたかと思われます。図が与えられているのはせめてもの救いでしょうか。

問3に関してはかなり回り道になりますが、 $u = \tan(\alpha/2)$ という三角関数の積分で登場する変数変換(ワイエルシュトラス変換)を行っても解けます。問4は問2, 問3を誘導として解く問題ですが、方針が立たなければ捨てても差はつかなかったでしょう。 P_1, P_2 を表す t の値を求めることを考えれば、うまく誘導に乗ることができる、という問題です。