大阪大学　数学（理系）　2022

大学受験テラス 解答作成チーム

1

題意より、$\left|z-\frac{3}{2}\right|=r \quad (r>0)$ …①

を満たす。

また $z+w=zw$ より、

$zw-z-w=0$

$(z-1)(w-1)=1$

$\therefore \quad z-1=\frac{1}{w-1}$

$z-\frac{3}{2}=\frac{1}{w-1}-\frac{1}{2}$ …②

②を①に代入して、

$\left|\frac{1}{w-1}-\frac{1}{2}\right|=r$

$\left|\frac{2-(w-1)}{2(w-1)}\right|=r$

$\frac{|-w+3|}{|w-1|}=2r$

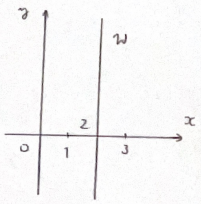
$\therefore \quad |w-3|=2r|w-1|$ …③

兵庫県西宮市羽衣町7-3 中島ビル3F
大学受験テラス 夙川校
大学受験専門個別指導・予備校
0798-56-9170
juken-terrace.com

(1) $2r=1$，すなわち $r=\frac{1}{2}$ のとき、③より

$|w-3|=|w-1|$

このとき、w は点 2 を通り実軸に垂直な直線を描く。



(2) $r \neq \frac{1}{2}$ のとき、③の両辺を2乗して

$|w-3|^2=4r^2|w-1|^2$

$(w-3)(\overline{w}-3)=4r^2(w-1)(\overline{w}-1)$

整理して、

$(1-4r^2)w\overline{w}-(3-4r^2)w-(3-4r^2)\overline{w}+(9-4r^2)=0$

$w\overline{w}-\frac{3-4r^2}{1-4r^2}w-\frac{3-4r^2}{1-4r^2}\overline{w}+\frac{9-4r^2}{1-4r^2}=0$

$\left(w-\frac{3-4r^2}{1-4r^2}\right)\left(\overline{w}-\frac{3-4r^2}{1-4r^2}\right)=\left(\frac{4r}{1-4r^2}\right)^2$

$\therefore \quad \left|w-\frac{3-4r^2}{1-4r^2}\right|^2=\left(\frac{4r}{1-4r^2}\right)^2$

つまり $\left|w-\dfrac{3-4r^2}{1-4r^2}\right| = \begin{cases} \dfrac{4r}{1-4r^2} & \left(0<r<\dfrac{1}{2}\right) \\ \dfrac{4r}{4r^2-1} & \left(\dfrac{1}{2}<r\right) \end{cases}$

である.

したがって, (1)(2) より

- $0<r<\dfrac{1}{2}$ のとき

  中心: $\dfrac{3-4r^2}{1-4r^2}$, 半径 $\dfrac{4r}{1-4r^2}$ の円

- $r=\dfrac{1}{2}$ のとき

  点 2 を通り実軸に垂直な直線

- $\dfrac{1}{2}<r$ のとき

  中心: $\dfrac{3-4r^2}{1-4r^2}$, 半径 $\dfrac{4r}{4r^2-1}$ の円

を描く.

※ [別解] (2) において, 複素数平面上で

$A(1,0)$, $B(3,0)$, $P(x,y)$

とし, $w=x+iy$ とすると, ③ より

$|w-3| = 2r|w-1|$

$PB = 2r \cdot PA$

2乗して $PB^2 = 4r^2 \cdot PA^2$

$(x-3)^2+y^2 = 4r^2\{(x-1)^2+y^2\}$

整理して

$(1-4r^2)x^2+(-6+8r^2)x+(1-4r^2)y^2 = 4r^2-9$

$\therefore \left(x-\dfrac{3-4r^2}{1-4r^2}\right)^2+y^2 = \left(\dfrac{4r}{4r^2-1}\right)^2$

としても良い.

兵庫県西宮市羽衣町7-3 中島ビル2F
大学受験テラス 夙川校
大学受験専門個別指導・予備校
0798-50-9170
juken-terrace.com

兵庫県西宮市羽衣町7-3 中島ビル2F
大学受験テラス 夙川校
大学受験専門個別指導・予備校
0798-56-9179
juku@terrace.com

2

(1) $\cos 4\alpha = \cos(2\pi - 4\alpha)$

$= \cos\left(2\pi - \frac{8}{7}\pi\right)$

$= \cos\frac{6}{7}\pi$

$= \cos 3\alpha$ より示された. □

(2) $f(\cos\alpha)$ を $\cos\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\cos 3\alpha$ を用いて表す.

$$\begin{cases} \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \\ \cos 3\alpha = -3\cos\alpha + 4\cos^3\alpha \\ \left(\Leftrightarrow \cos^3\alpha = \frac{1}{4}\cos 3\alpha + \frac{3}{4}\cos\alpha\right) \end{cases}$$

を用いると,

$f(\cos\alpha)$

$= 8\cos^3\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha - 1$

$= 8\left(\frac{1}{4}\cos 3\alpha + \frac{3}{4}\cos\alpha\right)$

$+ 2(2\cos^2\alpha - 1) - 4\cos\alpha + 1$

$= 2(\cos 3\alpha + \cos 2\alpha + \cos\alpha) + 1$ ・・・①

ここで,

$\sin 4\alpha = -\sin(2\pi - 4\alpha)$

$= -\sin\frac{6}{7}\pi$

$= -\sin 3\alpha$ ・・・②

であり、(1), ② と全く同様にして

$$\begin{cases} \cos 5\alpha = \cos 2\alpha \\ \sin 5\alpha = -\sin 2\alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \cos 6\alpha = \cos\alpha \\ \sin 6\alpha = -\sin\alpha \end{cases} \quad \cdots ③$$

を得る.

$z = \cos\alpha + i\sin\alpha = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}$

とおくと, ド・モアブルの定理 および (1), ②, ③ より

$$\begin{cases} z^7 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1 \quad \cdots ④ \\ \begin{aligned} z^4 &= \cos 4\alpha + i\sin 4\alpha \\ &= \cos 3\alpha - i\sin 3\alpha \\ z^5 &= \cos 2\alpha - i\sin 2\alpha \\ z^6 &= \cos\alpha - i\sin\alpha \end{aligned} \quad \cdots ⑤ \end{cases}$$

④ より、　$z^7 - 1 = 0$

つまり　$(z-1)(z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1) = 0$

$z \neq 1$ より、

$$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

$z^k = \cos k\alpha + i \sin k\alpha \quad (k = 1, 2, \cdots, 6)$

および ⑤ の結果を代入すると、

$$2(\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha) + 1 = 0 \quad \cdots ⑥$$

したがって、④、⑥ より　$f(\cos\alpha) = 0$ が示された。□

(3)　背理法を用いて、$f(x) = 0$ が有理数解をもたないことを示す。

$f(x) = 0$ が有理数解をもつと仮定する。

このとき、互いに素であり、

$$f\left(\frac{n}{m}\right) = 8 \cdot \frac{n^3}{m^3} + 4 \cdot \frac{n^2}{m^2} - 4 \cdot \frac{n}{m} - 1 = 0 \quad \cdots ⑦$$

を満たすような整数の組 (m, n) が存在する。

※ ただし、$f(0) \neq 0$ より $(m, n) \neq (0, 0)$

⑦ の両辺に m^3 をかけて、

$$8n^3 + 4mn^2 - 4m^2n - m^3 = 0$$

$$4n^2(2n+m) = m^2(4n+m) \quad \cdots ⑧$$

⑧ より、$\begin{cases} (1) & m \text{ は偶数} \\ (2) & 4n+m \text{ は偶数} \end{cases}$

のいずれかが成立する。

(1)　のとき、$m = 2k$ $(k$：整数$)$ とおけて、⑧ より

$$4n^2 \cdot (2n+2k) = 4k^2(4n+2k)$$

$$\therefore \quad n^2(n+k) = k^2(2n+k) \quad \cdots ⑨$$

である。

ここで、いま n, m は互いに素だから n, k も互いに素である。よって $n+k$ は k^2 の倍数でなければならない。

しかし、このとき

$$n + k = k^2 l \quad (l$$：整数$)$$

$$\therefore \quad n = k(kl - 1)$$

となり、n は k の倍数となる。これは m, n がともに k を約数にもつことになり、m, n が互いに素であることに矛盾する。

(2)　のとき、$4n + m = 2k$ $(k$：整数$)$ とおける。

このとき $m = 2(k-2n)$ より m は偶数となるので、(1) に帰着され、やはり矛盾する。

したがって、$f(x) = 0$ は有理数解をもたないので、(2) より $\cos\alpha$ も有理数でないことが示された。□

兵庫県西宮市羽衣町7-3 中島ビル2F
大学受験専門個別指導塾 尻川校
0798-60-0170
juken-terrace.com

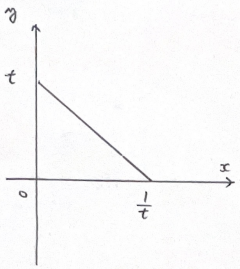
兵庫県西宮市羽衣町7-3 中島ビル2F
大学受験テラス 夙川校
大学受験専門個別指導・予備校
0798-60-9170
juken-terrace.com

3

〔解法1〕 (順像法)

線分PQの式は,

$$\frac{x}{\frac{1}{t}}+\frac{y}{t}=1 \quad (x,y\geqq 0)$$



つまり $y=t-t^2x$ である.

$x>0$ とすると y は t の2次関数と見ることができて,

$$y=-x\left(t-\frac{1}{2x}\right)^2+\frac{1}{4x} \quad (1\leqq t\leqq 2)$$

これを t についての関数とみた場合分けにより y のとりうる最大,最小値を x で表す.

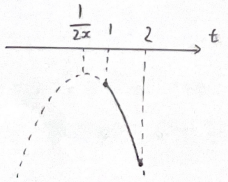
(1) $\frac{1}{2x}\leqq 1$ つまり $x\geqq\frac{1}{2}$ のとき

右図より

$y(t=2)\leqq y(t)\leqq y(t=1)$

よって,

$2-4x\leqq y\leqq 1-x$



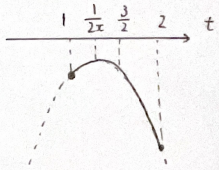
(2) $1<\frac{1}{2x}\leqq\frac{3}{2}$ つまり $\frac{1}{3}\leqq x<\frac{1}{2}$ のとき

右図より

$y(t=2)\leqq y(t)\leqq y\left(t=\frac{1}{2x}\right)$

よって,

$2-4x\leqq y\leqq\frac{1}{4x}$



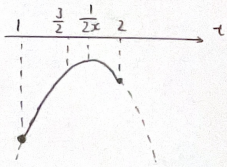
(3) $\frac{3}{2}<\frac{1}{2x}\leqq 2$ つまり $\frac{1}{4}\leqq x<\frac{1}{3}$ のとき

右図より

$y(t=1)\leqq y(t)\leqq y\left(t=\frac{1}{2x}\right)$

よって,

$1-x\leqq y\leqq\frac{1}{4x}$



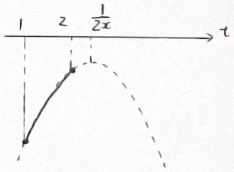
(4) $2<\frac{1}{2x}$ つまり $0<x<\frac{1}{4}$ のとき

右図より,

$y(t=1)\leqq y(t)\leqq y(t=2)$

よって,

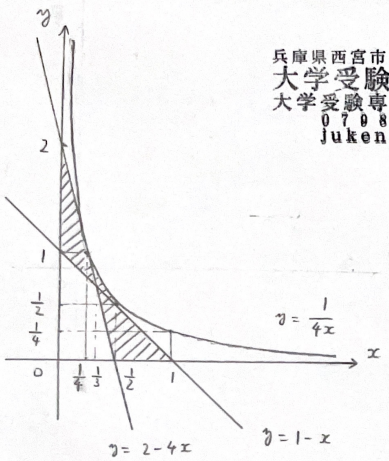
$1-x\leqq y\leqq 2-4x$



一方, $x=0$ のとき, $y=t$ より $1\leqq y\leqq 2$. …(※)

よって, (1)(2)(3)(4) および (※) を $x\geqq 0$, $y\geqq 0$ で図示するとよい. ただし境界線を含む.

兵庫県西宮市羽衣町7-3 中島ビル2F
大学受験テラス 夙川校
大学受験専門個別指導・予備校
0798-60-9170
juken-terrace.com



〔解法2〕　(逆像法)

$y = t - t^2x$

より、　$xt^2 - t + y = 0$　……①

であり、①が　$1 \leqq t \leqq 2$　の範囲で実数解を

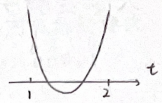
もつための条件を考えればよい。

$f(t) = xt^2 - t + y$　　$(x > 0)$

とおくと、$f(t) = 0$ は2次方程式より、解は次の2つ、

(D：$f(t) = 0$ の判別式とする)

(1)　$f(t) = 0$ が $1 \leqq t \leqq 2$ の範囲に重解を含む2つの実数解をもつ。



$$\begin{cases} D \geqq 0 \\ 1 \leqq (\text{軸}) \leqq 2 \\ f(1) \geqq 0 \\ f(2) \geqq 0 \end{cases}$$

このとき、

$D \geqq 0 \iff 1 - 4xy \geqq 0$

つまり　$y \leqq \dfrac{1}{4x}$

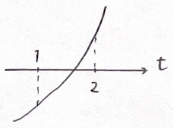
$1 \leqq (\text{軸}) \leqq 2 \iff 1 \leqq \dfrac{1}{2x} \leqq 2$

つまり　$\dfrac{1}{4} \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$

$f(1) \geqq 0 \iff y \geqq -x + 1$

$f(2) \geqq 0 \iff y \geqq -4x + 2$

(2)　$f(t) = 0$ が $1 \leqq t \leqq 2$ にただ1つの実数解をもつ。



$f(1)\,f(2) \leqq 0 \iff \{y - (-x+1)\}\{y - (-4x+2)\} \leqq 0$

つまり、

$$\begin{cases} y \geqq -x + 1 \\ y \leqq -4x + 2 \end{cases}$$　または　$$\begin{cases} y \leqq -x + 1 \\ y \geqq -4x + 2 \end{cases}$$

また、$x = 0$ のとき　$f(t) = -t + y = 0$ が $1 \leqq t \leqq 2$

の範囲で実数解をもつとき、$t = y$ が $1 \leqq y \leqq 2$ を満たす。　(※)

よって、(1)(2)(※) を $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ の範囲で図示すると、

〔解法1〕の図となる。□

兵庫県西宮市羽衣町7-3 中島ビル2F
大学受験テラス 夙川校
大学受験専門個別指導・予備校
0798-56-9170
juken-terrace.com

4

(1) $g(x) = f(x) - x$

$= \log(x+1) + 1 - x \quad (x > 0)$

とおくと, $g'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 < 0$

$(\because x > 0)$

より, $g(x)$ は $x > 0$ で単調減少関数.

また, $\begin{cases} g(0) = 1 > 0 \\ \lim_{x \to \infty} g(x) = -\infty \end{cases}$

より, $g(x) = 0$ は $x > 0$ の範囲でただ1つの実数解をもつ.

(2) $f(x) = \log(x+1) + 1$ より

$f'(x) = \frac{1}{x+1} > 0$

$f(x)$ は $x \geq 0$ で微分可能なので, 平均値の定理より,

$$\frac{f(\alpha) - f(x)}{\alpha - x} = f'(c) \quad \cdots ①$$

を満たす実数 c $(x < c < \alpha)$ が存在する.

①において, 題意より $f(\alpha) = \alpha$

また, $f'(x)$ は $0 < x$ で狭義単調減少関数なので,

$x < c$ のとき $\frac{\alpha - f(x)}{\alpha - x} = f'(c) < f'(x) \quad \cdots ②$

一方, $f'(x) > 0$ $(x > 0)$ より, $f(x)$ は狭義単調増加関数なので, $x < \alpha \iff f(x) < f(\alpha)$

つまり, $0 < \frac{f(\alpha) - f(x)}{\alpha - x} = \frac{\alpha - f(x)}{\alpha - x} \quad \cdots ③$

したがって ②③ より

$0 < \frac{\alpha - f(x)}{\alpha - x} < f'(x)$ が示された. □

(3) $g(1) = \log 2 > 0 = g(\alpha)$ かつ $g(x)$ の単調減少性より $x_1 = 1 < \alpha$ である.

また $0 < x_n < \alpha$ と仮定すると $f(x)$ の単調増加性より

$f(0) < f(x_n) < f(\alpha) \iff 1 < x_{n+1} < \alpha$ だから,

帰納的にすべての n に対して $0 < x_n < \alpha$ として議論してよい. $\cdots ④$

さらに, $g(x)$ の単調減少性と $g(0) = 1$, $g(\alpha) = 0$ から

$0 < x < \alpha \Rightarrow 1 > g(x) > 0$

つまり $0 < x < \alpha$ を満たす x において

$g(x) = f(x) - x > 0$ つまり $f(x) > x$

がいえるので、 ④ より $x_{n+1} = f(x_n) > x_n$

だから、 $\{x_n\}$ は単調増加列である。

すなわち、 $1 = x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ と

$f'(x)$ の単調減少性より

$$f'(1) = f'(x_1) > f'(x_n)$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2} > f'(x_n) \qquad \cdots ⑤$$

である。

よって、 ④, ⑤ より (2) の結果が利用できる。

$0 < x_n < \alpha$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ が成り立つので

$$\frac{\alpha - f(x_n)}{\alpha - x_n} < f'(x_n) < \frac{1}{2}$$

$$\frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} < \frac{1}{2}$$

したがって $\quad \alpha - x_{n+1} < \frac{1}{2}(\alpha - x_n)$

が示された。□

(4) (3) より、

$$|\alpha - x_n| < \left|\frac{1}{2}(\alpha - x_{n-1})\right| = \frac{1}{2}|\alpha - x_{n-1}|$$

$$< \left(\frac{1}{2}\right)^2 |\alpha - x_{n-2}|$$

$$< \cdots$$

$$< \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |\alpha - x_1|$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |\alpha - 1|$$

$$\longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

だから、 はさみうちの原理 より

$$\lim_{n\to\infty} |\alpha - x_n| = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

が示された。□

兵庫県西宮市羽衣町7-3 中島ビル2F
大学受験テラス 夙川校
大学受験専門個別指導・予備校
0798-56-9170
juken-terrace.com

5

兵庫県西宮市羽衣町7-3 中島ビル2F
大学受験テラス 夙川校
大学受験専門個別指導・予備校
0798-50-9170
juken-terrace.com

$$\frac{dx}{dt} = e^t(\cos t - \sin t)$$

$$= \sqrt{2}\, e^t \sin\left(t + \frac{3}{4}\pi\right)$$

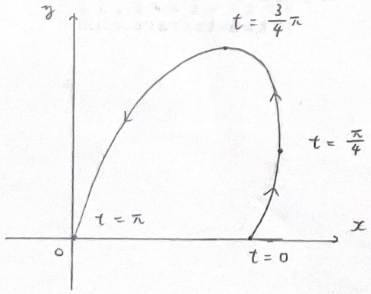
$$\frac{dy}{dt} = e^t(\sin t + \cos t)$$

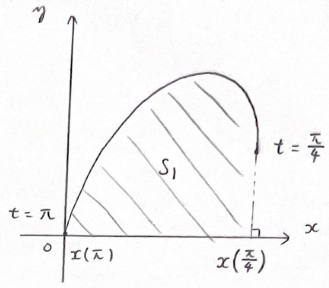
$$= \sqrt{2}\, e^t \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

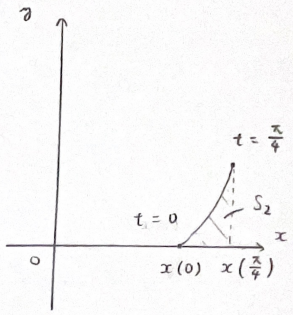
より、増減表は以下.

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$		$+$	0	$-$		$-$	
x	e^{π}	↗	$\frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}+e^{\pi}$	↘	$-\frac{e^{\frac{3}{4}\pi}}{\sqrt{2}}+e^{\pi}$	↘	0
$\frac{dy}{dt}$		$+$		$+$	0	$-$	
y	0	↗	$\frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	↗	$\frac{e^{\frac{3}{4}\pi}}{\sqrt{2}}$	↘	0

つまり概形は以下.







図のように面積を S_1, S_2 と定めると、求める面積 S は

$S = S_1 - S_2$ である.

$$S_1 = \int_{x(\pi)}^{x\left(\frac{\pi}{4}\right)} y\, dx$$

$$= \int_{\pi}^{\frac{\pi}{4}} y \cdot \frac{dx}{dt}\, dt$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} e^t \sin t \cdot e^t(\cos t - \sin t)\, dt$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \left(e^{2t}\sin t\cos t - e^t \sin^2 t\right) dt$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \left(\frac{1}{2}e^{2t}\sin 2t + \frac{1}{2}e^{2t}\cos 2t - \frac{e^{2t}}{2}\right) dt$$

同様に,

$$S_2 = \int_{x(0)}^{x\left(\frac{\pi}{4}\right)} y\, dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2}e^{2t}\sin 2t + \frac{1}{2}e^{2t}\cos t - \frac{e^{2t}}{2}\right) dt$$

ここで，

$$\begin{cases} (e^{2t}\cos 2t)' = 2e^{2t}\cos 2t - 2e^{2t}\sin 2t & \cdots ① \\ (e^{2t}\sin 2t)' = 2e^{2t}\sin 2t + 2e^{2t}\cos 2t & \cdots ② \end{cases}$$

① + ② より

$$(e^{2t}\cos 2t + e^{2t}\sin 2t)' = 4e^{2t}\cos 2t \quad \cdots ③$$

① − ② より

$$(e^{2t}\cos 2t - e^{2t}\sin 2t)' = -4e^{2t}\sin 2t \quad \cdots ④$$

③ − ④ より，

$$4(e^{2t}\cos 2t + e^{2t}\sin 2t) = (2e^{2t}\sin 2t)'$$

つまり，$\frac{1}{2}e^{2t}\sin 2t + \frac{1}{2}e^{2t}\cos t = \left(\frac{1}{4}e^{2t}\sin 2t\right)'$

$$\therefore \int\left(\frac{1}{2}e^{2t}\sin 2t + \frac{1}{2}e^{2t}\cos t\right)dt = \frac{1}{4}e^{2t}\sin 2t + C$$

（C：積分定数）

なので，

$$S_1 = -\left[\frac{1}{4}e^{2t}\sin 2t - \frac{1}{4}e^{2t}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}$$

$$= -\left(-\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{4} - \frac{1}{4}e^{2\pi} + \frac{1}{4}e^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$= \frac{e^{2\pi}}{4}$$

また，

$$S_2 = \left[\frac{1}{4}e^{2t}\sin 2t - \frac{1}{4}e^{2t}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{4}e^{\frac{\pi}{2}} - \left(\frac{1}{4}e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4}$$

したがって，

$$S = S_1 - S_2$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{4}(e^{2\pi} - 1)}}$$

兵庫県西宮市高松町7-9 申鳥ビル3F
大学受験テラス 夙川校
大学受験専門個別指導・予備校
0798-56-9170
juken-terrace.com