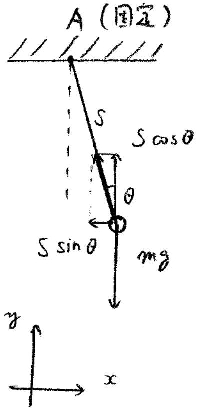
大阪大学　物理　2022

〔1〕

問1　右図より

$$\begin{cases} ma_x = \underset{(a)}{\underline{\underline{-S\sin\theta}}} & \cdots ① \\ ma_y = \underset{(b)}{\underline{\underline{S\cos\theta - mg}}} & \cdots ② \end{cases}$$



問2　$\sin\theta \fallingdotseq \theta$,　$\cos\theta \fallingdotseq 1$　のとき,

小球は　x 方向のみに運動すると近似できるので,　② で $a_y = 0$,　$\cos\theta \fallingdotseq 1$

として,

$$0 = S - mg$$

$$\therefore\ S = mg$$

これを ① に代入して,

$$ma_x = -mg\sin\theta$$

さらに　A を原点としたとき,　B の　x 座標は

$x = l\sin\theta$　だから,

$$ma_x = -\frac{mg}{l}x \quad \cdots ③$$

$$\therefore\ a_x = -\frac{g}{l}x$$

よって,　B は 角振動数　$\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$　の単振動をするので,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \underline{\underline{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}}$$

(参考)　A を原点とすると,　B の座標は

$$\begin{cases} x = l\sin\theta \\ y = -l\cos\theta \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = l\cos\theta\cdot\dot{\theta} & \left(\dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt}\right) \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = l\sin\theta\cdot\dot{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = -l\sin\theta\cdot(\dot{\theta})^2 + l\cos\theta\cdot\ddot{\theta} & \left(\ddot{\theta} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}\right) \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = l\cos\theta\cdot(\dot{\theta})^2 + l\sin\theta\cdot\ddot{\theta} \end{cases}$$

これらを ①② に代入して,

$$\begin{cases} -ml\sin\theta\cdot(\dot{\theta})^2 + ml\cos\theta\cdot\ddot{\theta} = -S\sin\theta & \cdots ④ \\ ml\cos\theta\cdot(\dot{\theta})^2 + ml\sin\theta\cdot\ddot{\theta} = S\cos\theta - mg & \cdots ⑤ \end{cases}$$

④ × $\cos\theta$ + ⑤ × $\sin\theta$　より,

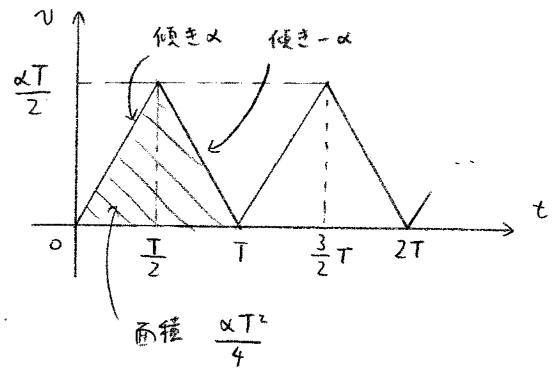
$$ml(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\cdot\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

$\sin\theta \fallingdotseq \theta$ より,　$\dfrac{d^2\theta}{dt^2} \fallingdotseq -\dfrac{g}{l}\theta$

よって,　θ が　$\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$　で単振動することが分かる.

問3

このとき、v−t 図は以下.



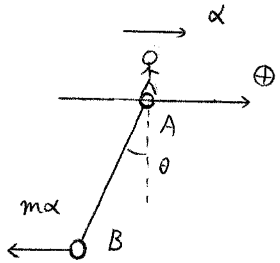
v−t 図の面積が変位となることから、

$$x_n = n \times \frac{\alpha T^2}{4}$$

$$= \underline{\underline{\frac{n\alpha T^2}{4}}}$$

問4

(c) $\underline{\underline{-m\alpha}}$ (c)



(d) 問2の③と同様に

非慣性系から見た

Bの加速度 a_x' と変位

x' を考えると、運動方程式は

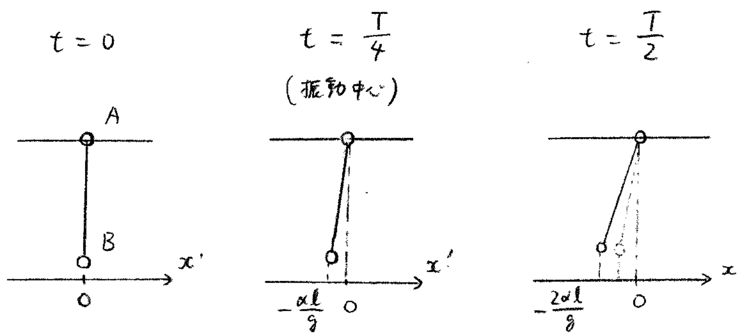
$$ma_x' = -mg\sin\theta \underbrace{- m\alpha}_{\text{慣性力}}$$

$$= -mg\cdot\frac{x'}{l} - m\alpha$$

$$= -\frac{mg}{l}\left(x' + \frac{\alpha l}{g}\right)$$

これは中心 $\underline{\underline{-\frac{\alpha l}{g}}}$ (d) の単振動を表す.

(e) このとき、単振動の周期は T のままなので、



$x' = l\sin\theta \fallingdotseq l\theta$ (∵ $|\theta|$ は十分小さい)

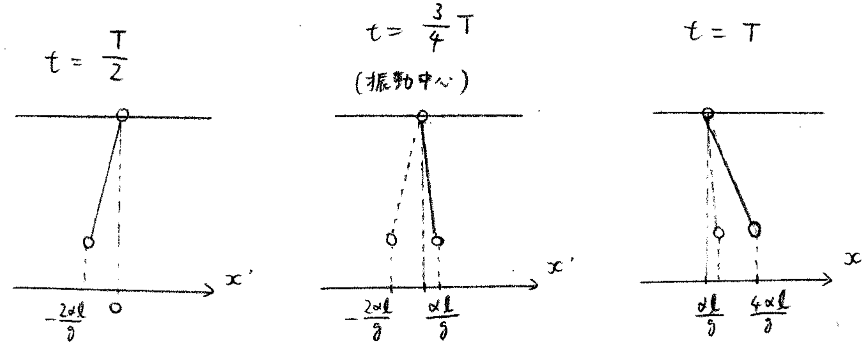
および $t = \frac{T}{2}$ において $x' = -\frac{2\alpha l}{g}$ だから、

$$-\frac{2\alpha l}{g} = l\theta \qquad \therefore\ \theta = \underline{\underline{-\frac{2\alpha}{g}}}$$ (e)

問5

・ $\frac{T}{2} < t < T$ のとき、慣性力が $0 < t < \frac{T}{2}$ と正負入れかわり、

振動中心が $x' = \frac{\alpha l}{g}$ となる.



よって 図より $t=T$ のとき、 $x_n = \dfrac{4\alpha l}{g}$.

つまり、 $\theta_1 = \dfrac{4\alpha}{g}$. ・・・ ⑥

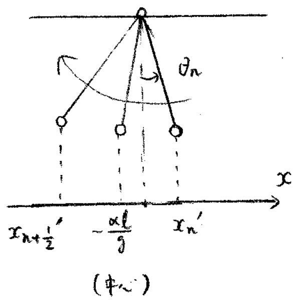
以後、 B は A に対して 振動中心 x' を

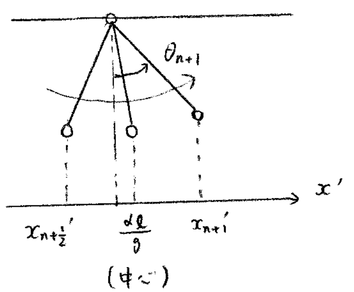
$$\begin{cases} \left(nT,\ \left(n+\frac{1}{2}\right)T\right) & : \quad -\dfrac{\alpha l}{g} \\ \left(\left(n+\frac{1}{2}\right)T,\ (n+1)T\right) & : \quad \dfrac{\alpha l}{g} \end{cases}$$

と入れかえながら振動をくり返す。

θ_n, θ_{n+1} に対応する x' を x_n', x_{n+1}' とする。

$nT < t < \left(n+\frac{1}{2}\right)T$ 　　　 $\left(n+\frac{1}{2}\right)T < t < (n+1)T$





図より
$$\begin{cases} \dfrac{x_n' + x_{n+\frac{1}{2}}'}{2} = -\dfrac{\alpha l}{g} \\ \dfrac{x_{n+\frac{1}{2}}' + x_{n+1}'}{2} = \dfrac{\alpha l}{g} \end{cases}$$

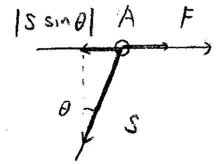
$$\therefore \quad x_{n+1}' = x_n' + \frac{4\alpha l}{g}$$

だから、 $\theta_{n+1} = \theta_n + \dfrac{4\alpha}{g}$ ・・ ⑦

⑥, ⑦ より、 $\theta_n = \dfrac{4n\alpha}{g}$

問6 　A の (慣性系における) 運動方程式は、 $t=\frac{T}{6}$ のとき、

求める外力を F として



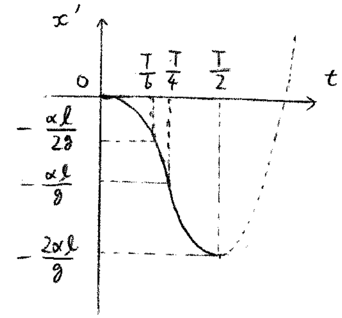
$$M\alpha = F + S\sin\theta \quad \cdots ⑧$$

である。

いま、 $|\theta| \ll 1$ より、問2と同様に $S = mg$,

$\theta = \sin\theta$ としてよい。

また、単振動の様子は右。



よって、 $t = \frac{T}{6}$ のとき、

$\theta = -\dfrac{\alpha}{2g}$ である。

したがって、⑧より

$$M\alpha = F + S\cdot\sin\left(-\frac{\alpha}{2g}\right) \fallingdotseq F + mg\cdot\left(-\frac{\alpha}{2g}\right)$$

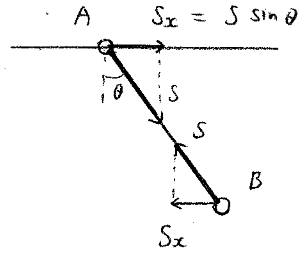
だから、

$$F = \left(M + \frac{m}{2}\right)\alpha$$

である。

問7

A，B に対してはたらく x方向の力は，それぞれ $S\sin\theta$，$-S\sin\theta$ だから，A，B の x 方向についての内力の和が 0 になる。



すなわち，x方向に関して A，B の間で運動量が保存する。

B が最高点に達したとき，B は A に対して静止する。すなわち A，B の x 方向の速度は等しくなり，その大きさを V とする。

このとき，運動量保存則より

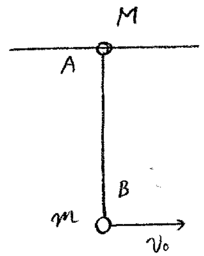
$$mv_0 = (M+m)V$$

$$\therefore\ V = \frac{m}{M+m}v_0$$

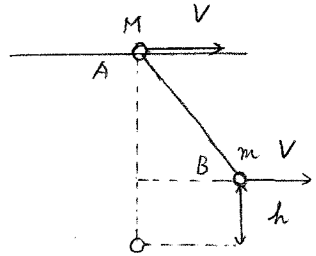
A は x方向のみ速度をもつので，求める速さは

$$|V| = \frac{m}{M+m}v_0$$

問8



$\Rightarrow$



求める高さを h とし，重力による位置エネルギーの基準を B の初期位置とすると，A と棒が滑らかに動くことから力学的エネルギーが保存するので，

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh + \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mV^2$$

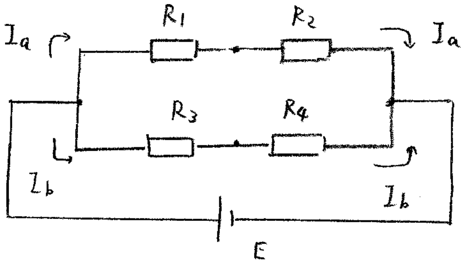
$V = \dfrac{m}{M+m}v_0$ を代入して整理すると

$$h = \frac{Mv_0^2}{2(M+m)g}$$

を得る。

〔2〕

問1　Gに電流が流れていないので、



のように描き直せる.

$$\therefore \begin{cases} V_2 = I_a \cdot R_2 \\ V_1 = I_a \cdot R_1 \end{cases}$$

辺々分数をとって、 $\dfrac{V_2}{V_1} = \underline{\underline{\dfrac{R_2}{R_1}}}$

問2　ホイートストンブリッジ回路の性質から

$$R_1 R_4 = R_2 R_3 \qquad \therefore \quad R_4 = \underline{\underline{\frac{R_2 R_3}{R_1}}}$$

※　なお、詳しくは以下.

問1と同様にして、 $\dfrac{V_4}{V_3} = \dfrac{R_4}{R_3}$

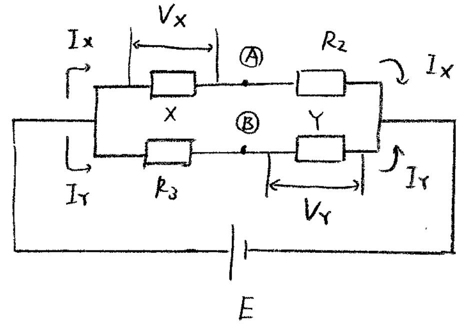
（V_3, V_4 : 抵抗3, 4の両端電圧）

また、Gの両端における電位が等しいので、

$V_1 = V_3$, $V_2 = V_4$ だから.

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_4}{R_3} \qquad \text{すなわち} \qquad R_4 = \frac{R_2 R_3}{R_1}$$

問3



X, R_2, E についてキルヒホッフの法則より

$$E - V_X - R_2 I_X = 0$$

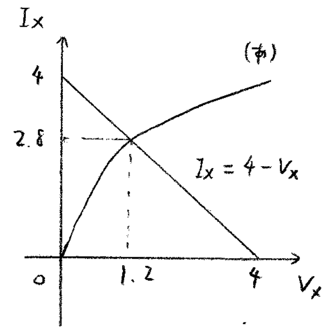
$$\therefore \quad I_X = \underline{\underline{\frac{E - V_X}{R_2}}}$$

問4　(a)　問3より

$$I_X = 4 - V_X \qquad \cdots ①$$

これと(あ)の電圧-電流特性の交点を読みとって、

$$\begin{cases} I_X = 2.8 \text{ A} \\ V_X = 1.2 \text{ V} \end{cases} \quad \text{である.}$$



このとき、図ⒶⒷの電位が等しいため、

$V_Y = R_2 I_X$

であり、$R_2 = 1.0$ A より

$V_Y = 2.8$ V.

したがって　$V_X = \underline{\underline{1.2 \text{ V}}}$,　$V_Y = \underline{\underline{2.8 \text{ V}}}$

(b) 問3と同様にして,

$$I_Y = \frac{E - V_Y}{R_3} = 2 - \frac{1}{2}V_Y \quad \cdots ②$$

また, E, X, Y におけるキルヒホッフの法則より

$$V_X + V_Y = E = 4\,V \quad \cdots ③$$

①, ② を 図2に書きこみ, (あ)(い)(う)(え) それぞれにおける V_X, V_Y の値を読みとると,

	V_X [V]	V_Y [V]
(あ)	1.2	0.4
(い)	1.6	0.8
(う)	2.4	1.2
(え)	2.8	2.0

③を満たす組み合わせは,

$$V_X = 2.8\,V, \quad V_Y = 1.2\,V$$

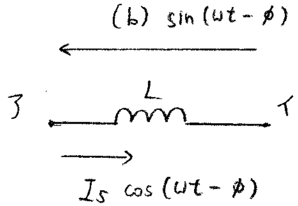
のときのみだから, $\underline{\underline{\text{X : (え)} \quad \text{Y : (う)}}}$

問5

(a) 抵抗5におけるオームの法則より

$$\underbrace{\underline{\underline{R I_S}}}_{(a)} \cos(\omega t - \phi)$$

(b) イエ間に電流が生じていないので, アイ間に流れる電流も $I_S \cos(\omega t - \phi)$.



コイルにおいては

$$\begin{cases} \text{リアクタンス} : X_L = \omega L \\ \text{位相} : \angle V = \angle I + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

より, 求める $V_L(t)$ は

$$V_L(t) = I_S \cdot X_L \cos\left(\omega t - \phi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \underbrace{\underline{\underline{-\omega L I_S}}}_{(b)} \sin(\omega t - \phi)$$

(c)(d) 題意と与えられた合成公式より,

$$E_0 \cos(\omega t) = R I_S \cos(\omega t - \phi) - \omega L I_S \sin(\omega t - \phi)$$

$$= I_S \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \cos(\omega t - \phi + \gamma)$$

$$\left(\tan\gamma = -\frac{-\omega L I_S}{R I_S} = \frac{\omega L}{R} \right)$$

であり, 振幅と位相を比較して

$$\begin{cases} E_0 = I_S \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \\ -\phi + \gamma = 0 \quad (\Leftrightarrow \phi = \gamma) \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} I_5 = \underset{(c)}{\underline{\underline{\dfrac{E_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}}}} \\ \tan\phi = \tan\gamma = \underset{(d)}{\underline{\underline{\dfrac{\omega L}{R}}}} \end{cases}$$ となる.

問6　イウ間とエウ間で電圧が等しく, $RI_5\cos(\omega t-\phi)$,

コンデンサーにおいては

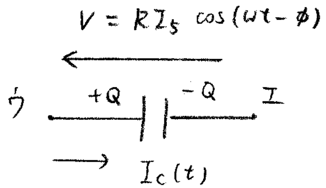
$$\begin{cases} \text{リアクタンス} : X_C = \dfrac{1}{\omega C} \\ \text{位相} : \angle V = \angle I - \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \quad \cdots (※)$$

より, 求める $I_C(t)$ は

$$I_C(t) = \frac{RI_5}{X_C}\cdot\cos\left(\omega t-\phi+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \underset{I_C}{\underline{\underline{-\omega CRI_5}}}\ \sin(\omega t-\phi)$$

[別解]　ウ→エに向かう電圧を正として,



$$Q = CV$$

の両辺をtで微分して, $\dfrac{dQ}{dt} = I$ を用いると

$$\frac{dQ}{dt} = I_C(t) = C\frac{dV}{dt}$$

いま, $V = RI_5\cos(\omega t-\phi)$ だから,

$$I_C(t) = C\cdot\frac{d}{dt}\left(RI_5\cos(\omega t-\phi)\right)$$

$$= \underset{I_C}{\underline{\underline{-\omega CRI_5}}}\ \sin(\omega t-\phi)$$

問7　エを基準としたウにおける電位は,

問6 (※) より

$$X_C\cdot I_C\ \sin\left(\omega t-\phi-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -\frac{I_C}{\omega C}\cos(\omega t-\phi)$$

また, エを基準としたアにおける電位は

$$R\,I_C\sin(\omega t-\phi)$$

であり, これらの和が $E_0\cos(\omega t)$ となるので, 問5と同様にして

$$E_0\cos(\omega t) = RI_C\sin(\omega t-\phi) - \frac{I_C}{\omega C}\cos(\omega t-\phi)$$

$$= I_C\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}\cos(\omega t-\phi+\gamma)$$

$$\left(\tan\gamma = -\frac{RI_C}{-\frac{I_C}{\omega C}} = \omega CR\right)$$

位相を比較して　$-\phi+\gamma \doteq 0$

$$\therefore \tan\phi = \tan\gamma = \omega CR$$

問5より, $\tan\gamma = \dfrac{\omega L}{R}$ だから,

$$\omega CR = \frac{\omega L}{R} \qquad \therefore C = \underline{\underline{\frac{L}{R^2}}}$$

〔3〕

A. I A, B, C の温度は常に T_0 である.

$p_0 = \dfrac{RT_0}{V_0}$ とおく.

問1

	1		2	
p_0, V_0 A		p_0, V_0 B		p_0, V_0 C

↓

$\frac{4}{3}V_0$ A	$\frac{2}{3}V_0$ B	V_0 C

Bについて, $pV = (一定)$ より,

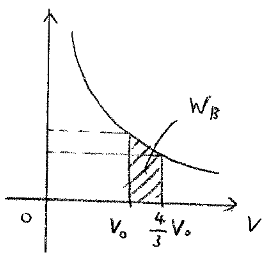
$$p_0 V_0 = p_B \cdot \frac{2}{3}V_0$$

$$\therefore \quad p_B = \frac{3}{2}p_0 = \underline{\underline{\frac{3RT_0}{2V_0}}}$$

問2 Aについての p-V図は右図.

このとき, W_B は右の面積だから,

図2より $\underline{\underline{RT_0 \log\frac{4}{3}}}$



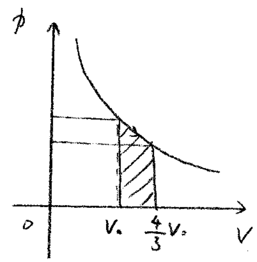
〔参考〕

$$W_B = \int_{V_0}^{\frac{4}{3}V_0} \frac{RT_0}{V}dV = RT_0\left[\log V\right]_{V_0}^{\frac{4}{3}V_0}$$

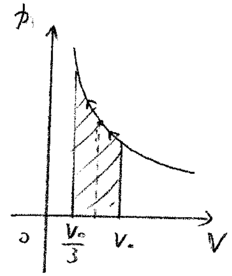
$$= RT_0 \log\frac{\frac{4}{3}V_0}{V_0}$$

$$= RT_0 \log\frac{4}{3} \quad である.$$

問3 このときの A, B, C の様子は以下.



A・C



B

(a) 一般に, $\Delta U = nC_v\Delta T$ であり, いま A, B, C いずれも $T = T_0$ (一定) つまり $\Delta T = 0$ だから, $\Delta U = \underline{\underline{0}}$

(b) (a)より 装置全体として $\Delta U = 0$

A, C が B に対してした仕事は ともに $W_B = RT_0\log\frac{4}{3}$.

Bがされた仕事は $RT_0 \log\dfrac{V_0}{V_0/3} = RT\log 3$

∴ 熱力学第一法則より

$$0 = -Q + \left(RT_0\log 3 - 2RT_0\log\frac{4}{3}\right)$$

$$\therefore \quad Q = \underline{\underline{RT_0 \log\frac{27}{16}}}$$

Ⅱ　A, B, C の圧力が常に等しいことに注意する.

問4　$pV^{\gamma} = (一定)$ のとき, $p = \dfrac{RT}{V}$ を代入して

$TV^{\gamma-1} = (一定)$ となる.

Bは常に断熱変化を行っているので, (あ)(う) について

$$T_0 V_0^{\gamma-1} = T_B \cdot \underbrace{\left(\frac{V_0}{3}\right)}_{3V_0 \times \frac{1}{4+1+4} = \frac{V_0}{3}}{}^{\gamma-1}$$

が成立し, $T_B = \underline{\underline{3^{\gamma-1} \cdot T_0}}$ である

問5　$p_0 = \dfrac{RT_0}{V_0}$ とおくと, (う) における Bの圧力 p_B は

$pV^{\gamma} = (一定)$ より

$$p_0 V_0^{\gamma} = p_B \left(\frac{V_0}{3}\right)^{\gamma}$$

$$\therefore\ p_B = 3^{\gamma} \cdot p_0$$

より　$3^{\gamma} p_0$ であり, このとき A, C も $3^{\gamma} p_0$ である.

よって　A, C の (う) における温度は「$pV = RT$」より

$$3^{\gamma} \cdot p_0 \cdot \underbrace{\left(\frac{4}{3}V_0\right)}_{3V_0 \times \frac{4}{4+1+4} = \frac{4}{3}V_0} = RT$$

$$\therefore\ T = 4 \cdot 3^{\gamma-1} \frac{p_0 V_0}{R} = 4 \cdot 3^{\gamma-1} T_0$$

つまり,

状態 \ T	A	B	C
(あ)	T_0	T_0	T_0
(う)	$4 \cdot 3^{\gamma-1} T_0$	$3^{\gamma-1} T_0$	$4 \cdot 3^{\gamma-1} T_0$

である.

いま, 装置が断熱されており, ピストンが自由に動くので, 熱力学第1法則より

$$\Delta U_A + \Delta U_B + \Delta U_C = (Q_1 + Q_2) - 0 \quad \cdots ①$$

$(\Delta U_A, \Delta U_B, \Delta U_C$: A, B, C の内部エネルギー変化量$)$

さらに,

$$\begin{cases} \Delta U_A = C_V \Delta T_A = C_V (4 \cdot 3^{\gamma-1} - 1) T_0 \\ \Delta U_B = C_V \Delta T_B = C_V (3^{\gamma-1} - 1) T_0 \quad \cdots ② \\ \Delta U_C = \Delta U_A \end{cases}$$

だから, ①②より

$$Q_1 + Q_2 = C_V (9 \cdot 3^{\gamma-1} - 3) T_0$$

$$= \underline{\underline{3 \cdot (3^{\gamma} - 1) C_V T_0}}$$

問6　(い) においては (あ) のみを熱した後なので, B, C の体積は等しい. そこで, (い) において

$(1-2a)V_0$ A	aV_0 B	aV_0 C

と体積をおく.

(い) における Bの圧力 $p_い$ は (あ)(い) で $pV^{\gamma} = (一定)$ を用いて,

$$p_0 V_0^{\gamma} = p_い (aV_0)^{\gamma}$$

$$\therefore\ p_い = a^{-\gamma} \cdot p_0$$

Aの圧力も等しく　$p_い = a^{-\gamma} p_0$　なので、

Aについて、(あ)(い)(う)の p と V をまとめると以下。

	p	V
(あ)	p_0	V_0
(い)	$a^{-\gamma} p_0$	$(1-2a)V_0$
(う)	$3^{\gamma} p_0$	$\frac{4}{3}V_0$

(い) → (う) は断熱過程より、$pV^{\gamma} = (一定)$ だから

$$a^{-\gamma} \cdot p_0 \cdot (1-2a)^{\gamma} \cdot V_0^{\gamma} = 3^{\gamma} \cdot p_0 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\gamma} \cdot V_0^{\gamma}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{1-2a}{a}\right)^{\gamma} = 4^{\gamma}$$

よって、　$a = \dfrac{1}{6}$

つまり　$V_A : V_B : V_C = \frac{4}{6}V_0 : \frac{1}{6}V_0 : \frac{1}{6}V_0$

$= \underline{\underline{4 : 1 : 1}}$　となる。

B.

問7　eV のエネルギーをもって電子が陽極へ到着し、そのエネルギーがもれなくX線に変換されたとき、最短波長 λ_0 となる。

$$\therefore \quad eV = h \cdot \frac{c}{\lambda_0}$$

すなわち　$\lambda_0 = \underline{\underline{\dfrac{hc}{eV}}}$

問8　一般に、エネルギー準位 E_n において、その内側に M_n 個の電子があるような場合を考える。

このとき、(遠心力) = (クーロン力) より

$$m \cdot \frac{v_n^2}{r_n} = k_0 \cdot \frac{(Z-M_n)e^2}{r_n^2} \quad \cdots ①$$

(r_n : E_n における軌道半径
v_n : E_n における電子の円運動速度)

また、量子条件より、

$$2\pi r_n = n\lambda = \frac{nh}{mv_n} \quad \cdots ②$$

(∵ ド・ブロイ波長は $mv = \frac{h}{\lambda}$ を満たす)

② を ① に代入して v_n を消去すると、

$$r_n = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m k_0 e^2 (Z-M_n)} \quad \cdots ③$$

$n=3$ のとき, $n=1, 2$ の電子の数が $2+8=10$

より, $M_3 = 10$.

したがって, $r_3 = \dfrac{9h^2}{4\pi^2 m k_0 e^2 (Z-10)}$

問9

$$E_n = \underbrace{\frac{1}{2} m v_n^2}_{\text{運動エネルギー}} - \underbrace{k_0 \cdot \frac{(Z-M_n)e^2}{r_n}}_{\text{無限遠を基準としたクーロン力による位置エネルギー}}$$ であり,

これに①を代入して, $m v_n^2$ を消去する.

$$E_n = -k_0 \cdot \frac{(Z-M_n)e^2}{2r_n}$$

さらに, ③を代入して

$$E_n = -\frac{2\pi^2 m k_0^2 (Z-M_n)^2 e^4}{h^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

よって,

$$E_H = -\frac{2\pi^2 m k_0^2 e^4}{h^2} \quad (\because Z=1,\ M_n=0,\ n=1)$$

$$E_2 = -\frac{2\pi^2 m k_0^2 \cdot (Z-2)^2 e^4}{h^2} \cdot \frac{1}{2^2} \quad (\because M_2=2,\ n=2)$$

$$E_3 = -\frac{2\pi^2 m k_0^2 \cdot (Z-10)^2 e^4}{h^2} \cdot \frac{1}{3^2} \quad \left(\because M_3=2+8=10,\ n=3\right)$$

したがって

$$\begin{cases} E_2 = \dfrac{(Z-2)^2}{4} E_H \\ E_3 = \dfrac{(Z-10)^2}{9} E_H \end{cases}$$ と表せる.

問10

問9と同様にして, $E_1 = Z^2 E_H$ …④

「$E = h\dfrac{c}{\lambda}$」の関係から, $\lambda_1 < \lambda_2$ のとき,

λ_2 の波長をもつX線の方がエネルギーは小さい.

つまり, λ_2 に対応するエネルギーは, 振動数条件より $E_2 - E_1$ である.

題意より, 固有X線放出前の E_2 の内側の総電子数は $Z-1=1$ なので,

$$\frac{(Z-1)^2}{4} E_H - E_1 = h\frac{c}{\lambda_2}$$

④を代入して整理すると

$$\lambda_2 = \frac{hc}{\left(\dfrac{(Z-1)^2}{4} - Z^2\right) E_H}$$

を得る.